Math 30411 B/C
Équations racines

1. Résous les équations suivantes.

a) $\sqrt{x+3} = 3\sqrt{x-1}$

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = \left(3\sqrt{x-1}\right)^2$$
$$x+3 = 9\left(x-1\right)$$
$$x+3 = 9x-9$$
$$8x = 12$$
$$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$
$$\sqrt{\frac{3}{2}+3} = 3\sqrt{\frac{3}{2}-1}$$
$$\sqrt{\frac{9}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

solution : $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} = 3$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = \left(\sqrt{x+5}+3\right)^2$$
$$x+2 = x+5+3\sqrt{x+5}+3\sqrt{x+5}+9$$
$$\left(-12\right)^2 = \left(6\sqrt{x+5}\right)^2$$
$$144 = 36\left(x+5\right)$$
$$144 = 36x+180$$
$$-36 = 36x$$
$$x = -1$$
$$\sqrt{-1+2} - \sqrt{-1+5} = 3$$
$$\sqrt{1} - \sqrt{4} = 3$$
$$1-2 = 3$$
$$-1 \neq 3$$

aucune solution

c) $\sqrt{2-n}+2 = 1+\sqrt{3+n}$

$$\left(\sqrt{2-n}\right)^2 = \left(-1+\sqrt{3+n}\right)^2$$
$$2-n = 1-\sqrt{3+n}-\sqrt{3+n}+3+n$$
$$2\sqrt{3+n} = 2+2n$$
$$\left(\sqrt{3+n}\right)^2 = \left(1+n\right)^2$$
$$3+n = 1+2n+n^2$$
$$0 = n^2+n-2$$
$$0 = \left(n+2\right)\left(n-1\right)$$
$$n = -2 \text{ ou } n = 1$$
$$\sqrt{2-\left(-2\right)}+2 = 1+\sqrt{3-2}$$
$$2+2 = 1+1$$
$$4 = 2$$
$$\sqrt{2-1}+2 = 1+\sqrt{3+1}$$
$$3 = 1+2$$
$$3 = 3$$

solution : $\left\{1\right\}$

d) $2\sqrt{x+1}+x = 1$

$$\left(2\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(1-x\right)^2$$
$$4\left(x+1\right) = 1-2x+x^2$$
$$0 = x^2-6x-3$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-4\left(1\right)\left(-3\right)}}{2}$$
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$
$$x = 3 \pm 2\sqrt{3}$$
$$x = 6,46 \text{ ou } x = -0,46$$
$$2\sqrt{6,46+1}+6,46 = 1$$
$$11,92 \neq 1$$

à rejeter

$$2\sqrt{-0,46+1}-0,46 = 1$$
$$1 = 1$$

solution : $\left\{3-2\sqrt{3}\right\}$

e) $\sqrt{k+1}+5=2k$

$$\left(\sqrt{k+1}\right)^2=\left(2k-5\right)^2$$
$$k+1=4k^2-10k-10k+25$$
$$0=4k^2-21k+24$$
$$k=\frac{21\pm\sqrt{\left(-21\right)^2-4\left(4\right)\left(24\right)}}{8}$$
$$k=\frac{21\pm\sqrt{57}}{8}$$
$$\sqrt{3,57+1}+5=2\left(3,57\right)$$
$$7,14=7,14$$
$$\sqrt{1,68+1}+5=2\left(1,68\right)$$
$$6,64\neq 3,36$$
à rejeter

solution : $\left\{\frac{21+\sqrt{57}}{8}\right\}$

f) $\sqrt{2-x}=\sqrt{2}-\sqrt{x}$

$$\left(\sqrt{2-x}\right)^2=\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)^2$$
$$2-x=2-\sqrt{2x}-\sqrt{2x}+x$$
$$-2x=-2\sqrt{2x}$$
$$\left(x\right)^2=\left(\sqrt{2x}\right)^2$$
$$x^2=2x$$
$$x^2-2x=0$$
$$x\left(x-2\right)=0$$
$$x=0 \text{ ou } x=2$$
$$\sqrt{2-0}=\sqrt{2}-\sqrt{0}$$
$$\sqrt{2}=\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2-2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}$$
$$0=0$$

solution : $\left\{0,2\right\}$

g) $x-6\sqrt{x}=-8$

$$\left(x+8\right)^2=\left(6\sqrt{x}\right)^2$$
$$x^2+8x+8x+64=36x$$
$$x^2-20x+64=0$$
$$\left(x-16\right)\left(x-4\right)=0$$
$$x=16 \text{ ou } x=4$$
$$16-6\sqrt{16}=-8$$
$$16-24=-8$$
$$-8=-8$$
$$4-6\sqrt{4}=-8$$
$$4-12=-8$$
$$-8=-8$$

solution : $\left\{4,16\right\}$

h) $\sqrt[3]{x+3}+2=-1$

$$\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3=\left(-3\right)^3$$
$$x+3=-27$$
$$x=-30$$
$$\sqrt[3]{-30+3}+2=-1$$
$$\sqrt[3]{-27}+2=-1$$
$$-3+2=-1$$
$$-1=-1$$

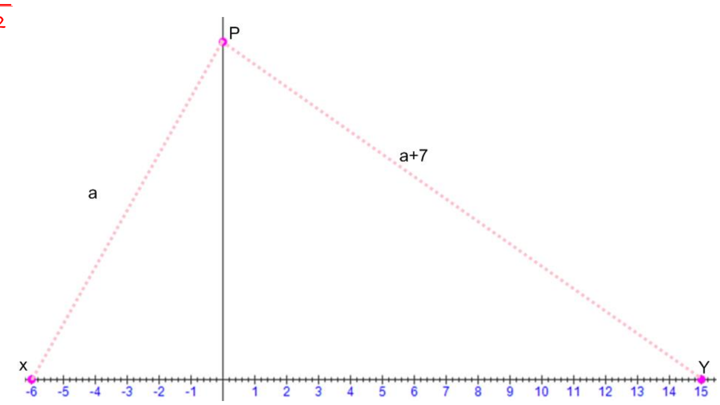
solution : $\left\{-30\right\}$

i)
$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$$
$$\frac{1}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$$
$$\frac{1+1\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\frac{1\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$
$$1+1-\sqrt{x}=1+\sqrt{x}$$
$$\left(1\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2$$
$$1=4x$$
$$x=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}$$
$$\frac{1}{\frac{3}{4}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{4}{3}+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$$
$$\frac{6}{3}=2$$
$$2=2$$
$$\text{solution : }\left\{\frac{1}{4}\right\}$$

2. Soit le triangle PXY. Les points X(-6, 0) et Y(15, 0) sont deux des sommets. Le point P est situé sur l'axe des y de telle manière que la longueur de PY a 7 unités de plus que la longueur de PX. Quelle est l'aire du triangle PXY ?

$$\left(-6,0\right),\left(0,p\right)\text{ et }\left(15,0\right)$$
$$\sqrt{\left(0+6\right)^2+\left(p-0\right)^2}+7=\sqrt{\left(0-15\right)^2+\left(p-0\right)^2}$$
$$\sqrt{36+p^2}+7=\sqrt{225+p^2}$$
$$36+p^2+14\sqrt{36+p^2}+49=225+p^2$$
$$14\sqrt{36+p^2}=140$$
$$\sqrt{36+p^2}=10$$
$$36+p^2=100$$
$$p^2=64$$
$$p=\pm 8$$
$$\text{Aire}=\frac{bh}{2}=\frac{\left(15+6\right)8}{2}=84\text{ unités}^2$$



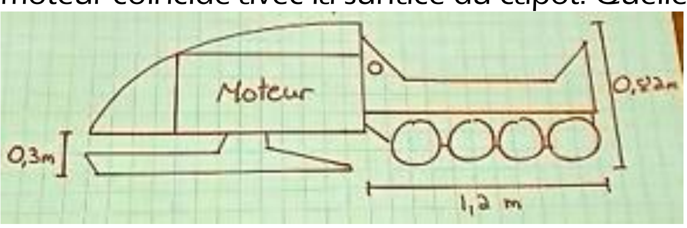
3. Soit f, une fonction racine carrée. On a que $D_f = \left[-3,+\infty\right[, I_f = \left]-\infty,8\right]$ et $f(1) = 7$. Résous $f(x) = 5$.

$S(h,k) = (-3,8)$ et $(x,y) = (1,7), a < 0, b > 0$

$$y = a\sqrt{b(x-h)} + k$$
$$7 = a\sqrt{1+3} + 8$$
$$-1 = 2a$$
$$a = \frac{-1}{2}$$

$$f(x) = \frac{-1}{2}\sqrt{x+3} + 8$$
$$5 = \frac{-1}{2}\sqrt{x+3} + 8$$
$$-3 = \frac{-1}{2}\sqrt{x+3}$$
$$6 = \sqrt{x+3}$$
$$36 = x+3$$
$$x = 33$$

4. Ci-dessous, on retrouve le croquis d'une motoneige. Le capot de la motoneige se modélise par une fonction racine carrée dont le sommet se situe à l'avant. À l'intérieur du capot, on retrouve un moteur qui est à 36 cm de l'avant et 24 cm de haut. Tel qu'indiqué dans le croquis, l'extrémité du moteur coïncide avec la surface du capot. Quelle est la longueur totale de la motoneige?



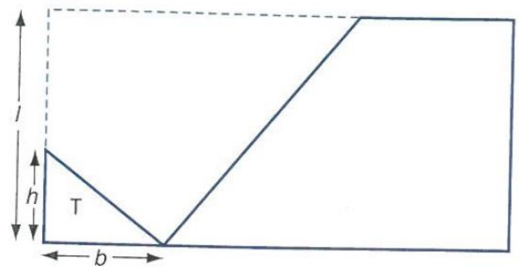
$S(h,k) = (0, 0.3)$ et $(x,y) = (0.36, 0.54), a > 0, b > 0$

$$y = a\sqrt{b(x-h)} + k$$
$$0,54 = a\sqrt{0,36} + 0,3$$
$$0,24 = 0,6a$$
$$a = 0,4$$
$$f(x) = 0,4\sqrt{x} + 0,3$$

$$0,82 = 0,4\sqrt{x} + 0,30,82 = 0,4\sqrt{x} + 0,3$$
$$0,52 = 0,4\sqrt{x}$$
$$\sqrt{x} = 1,3$$
$$x = 1,69$$

Longueur totale $= 1,69 + 1,2 = 2,89\,m$

5. On plie une feuille de papier de telle manière que le coin supérieur gauche vient toucher un point sur le bord inférieur de la feuille. Le triangle formé est appelé T, la base du triangle est appelée b, la hauteur du triangle est appelée h et la largeur de la feuille est appelée l, comme dans l'illustration ci-dessous.



a) Écris une équation qui exprime b en fonction de l et h.

$$(l-h)^2 = h^2 + b^2$$
$$b = \sqrt{(l-h)^2 - h^2}$$
$$b = \sqrt{l^2 - 2lh + h^2 - h^2}$$
$$b = \sqrt{l^2 - 2lh}$$

b) Écris une équation qui exprime l'aire, A, du triangle T en fonction de l et h.

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{h\sqrt{l^2 - 2lh}}{2}$$

c) Dans une certaine feuille, on a construit un triangle T dont l'aire est de 16 cm^2 et la hauteur est $\frac{3}{8}$ de la largeur de la page. À quelle distance du coin inférieur droit doit-on plier la page afin de reproduire le triangle T?

$$h = \frac{3}{8}l;\ b = ?$$
$$16 = \frac{\frac{3l}{8}\sqrt{l^2 - 2l\left(\frac{3l}{8}\right)}}{2}$$
$$32 = \frac{3l}{8}\sqrt{l^2 - \frac{3}{4}l^2}$$
$$\frac{256}{3} = l\sqrt{\frac{1}{4}l^2}$$
$$\frac{256}{3} = \frac{1}{2}l^2$$
$$l^2 = \frac{512}{3}$$
$$l = \pm 13{,}06$$

$$h = \frac{3}{8}(13{,}06) = 4{,}9\text{ cm}$$
$$(13{,}06 - 4{,}9)^2 = 4{,}9^2 + b^2$$
$$66{,}59 = 24{,}01 + b^2$$
$$b^2 = 42{,}58$$
$$b = 6{,}5\text{ cm}$$