Math 30311 - B

Bloc 1 – Régularité et algèbre

***Mise au point p. 137 – Tout sauf #4, 5, 12, 15

1. Voici six fonctions quadratiques :
   Pour chacune de ces fonctions :
   a) Indiquez l'emplacement de l'axe de symétrie;
   b) Déterminez les coordonnées du sommet;
   c) Déterminez au moins cinq autres point du graphique;
   d) Tracez à main levée le graphique de la fonction.

① $f(x) = 8x^2$

$f(x) = 8(x - 0)^2 + 0$

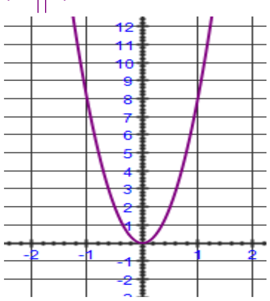
a) À $x = 0$

b) $S(0, 0)$

c)

x	y
−2	32
−1	8
0	0
1	8
2	32

d)



② $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$f(x) = (x^2 - 5x + {}^{25}/_4) - {}^{25}/_4 + 6$

$f(x) = (x - {}^5/_2)^2 - {}^1/_4$

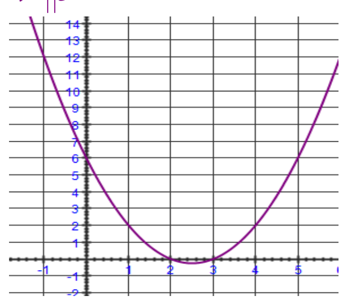
a) $x = {}^5/_2$

b) $S({}^5/_2, {}^{-1}/_4)$

c)

x	y
−2	20
−1	12
0	6
1	2
2	0

d)



③ $f(x) = 3x^2 + 3x - 60$

$f(x) = 3[(x^2 + x + ¼) - ¼ - 20]$

$f(x) = 3[(x + ½)^2 - {}^{81}/_4]$

$f(x) = 3(x + ½)^2 - {}^{243}/_4$

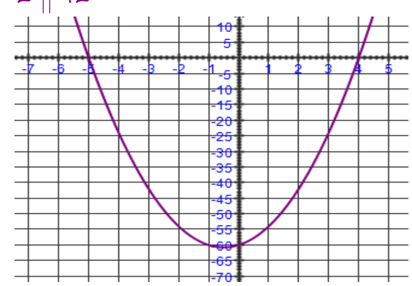
a) $X = {}^{-1}/_2$

b) $S({}^{-1}/_2, {}^{-243}/_4)$

c)

x	y
−2	−54
−1	−60
0	−60
1	−54
2	−42

d)



④ $f(x) = -4x^2 + 16$

$f(x) = -4(x - 0)^2 + 16$

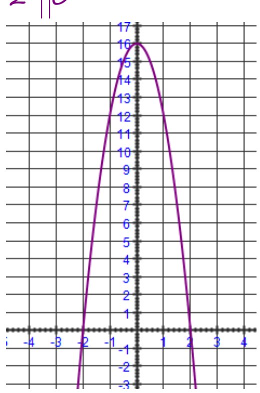
a) $x = 0$

b) $S(0, 16)$

c)

x	y
−2	0
−1	12
0	16
1	12
2	0

d)



⑤ $f(x) = -2{,}5x^2 + 5x$

$f(x) = -2{,}5[(x^2 - 2x + 1) - 1]$

$f(x) = -2{,}5[(x - 1)^2 - 1]$

$f(x) = -2{,}5(x - 1)^2 + 2{,}5$

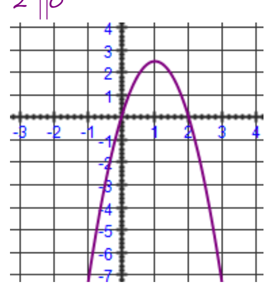
a) $x = 1$

b) $S(1; 2{,}5)$

c)

x	y
−2	−20
−1	−7,5
0	0
1	2,5
2	0

d)



⑥ $f(x) = 2x^2 + 3{,}4x - 9{,}6$

$f(x) = 2[(x^2 + 1{,}7x + 0{,}7225) - 0{,}7225 - 4{,}8]$

$f(x) = 2[(x + 0{,}85)^2 - 5{,}5225]$

$f(x) = 2(x + 0{,}85)^2 - 11{,}045$

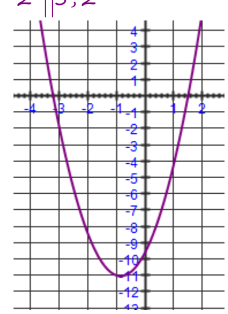
a) $x = -0{,}85$

b) $S(-0{,}85; -11{,}045)$

c)

x	y
−2	−8,4
−1	−11
0	−9,6
1	−4,2
2	5,2

d)



***Mise au point p. 137 – Tout sauf #4, 5, 12, 15

2. Voici la règle sous la forme canonique de quatre fonctions quadratiques :
   ① $f_1(x) = (x - 3)^2 - 1$ ② $f_2(x) = -2(x+1)^2$
   ③ $f_3(x) = -3(x + 2)^2 + 12$ ④ $f_4(x) = -2(x - 4)^2 - 6$

   Pour chacune de ces fonctions :
   a) Déterminez les coordonnées du sommet;
   b) Déterminez algébriquement le ou les zéros de la fonction, s'il y en a;
   c) Transformez algébriquement la règle de la forme canonique à la forme générale;

a) $S(3,-1)$ a) $S(-1,0)$ a) $S(-2,12)$ a) $S(4,-6)$

b) $0 = (x-3)^2 - 1$
$1 = (x-3)^2$
$\pm 1 = x - 3$
$x = 3 + 1 = 4$
$x = 3 - 1 = 2$

b) $0 = -2(x+1)^2$
$\frac{0}{-2} = \frac{-2(x+1)^2}{-2}$
$0 = x + 1$
$x = -1$

b) $0 = -3(x+2)^2 + 12$
$\frac{-12}{-3} = \frac{-3(x+2)^2}{-3}$
$4 = (x+2)^2$
$\pm\sqrt{4} = \sqrt{(x+2)^2}$
$\pm 2 = x + 2$
$x = -2 + 2 = 0$
$x = -2 - 2 = -4$

b) $0 = -2(x-4)^2 - 6$
$\frac{6}{-2} = \frac{-2(x-4)^2}{-2}$
$\sqrt{-3} = \sqrt{(x-4)^2}$
aucune racine

c) $f_1(x) = (x-3)(x-3) - 1$
$f_1(x) = x^2 - 3x - 3x + 9 - 1$
$f_1(x) = x^2 - 6x + 8$

c) $f_2(x) = -2(x+1)(x+1)$
$f_2(x) = -2(x^2 + x + x + 1)$
$f_2(x) = -2x^2 - 4x + 2$

c) $f_3(x) = -3(x+2)(x+2) + 12$
$f_3(x) = -3(x^2 + 2x + 2x + 4) + 12$
$f_3(x) = -3x^2 - 12x - 12 + 12$
$f_3(x) = -3x^2 - 12x$

c) $f_4(x) = -2(x-4)(x-4) - 6$
$f_4(x) = -2(x^2 - 4x - 4x + 16) - 6$
$f_4(x) = -2x^2 + 16x - 32 - 6$
$f_4(x) = -2x^2 + 16x - 38$

3. Voici la règle sous la forme générale de quatre fonctions quadratiques :
   ① $f_1(x) = x^2 - 10x + 10$ ② $f_2(x) = 2x^2 + 4x - 12$
   ③ $f_3(x) = -3x^2 + 12x + 10$ ④ $f_4(x) = 2x^2 + 3x + 4$

   Pour chacune de ces fonctions :
   a) Déterminez les coordonnées du sommet;
   b) Transformez la règle de la forme générale à la forme canonique.

b) $f_1(x) = x^2 - 10x + 10$
$f_1(x) = 1\left[(x^2 - 10x + 25) - 25 + 10\right]$
$f_1(x) = 1\left[(x-5)^2 - 15\right]$
$f_1(x) = 1(x-5)^2 - 15$
$S(5,-15)$

b) $f_2(x) = 2x^2 + 4x - 12$
$f_2(x) = 2\left[(x^2 + 2x + 1) - 1 - 6\right]$
$f_2(x) = 2\left[(x+1)^2 - 7\right]$
$f_2(x) = 2(x+1)^2 - 14$
a) $S(-1,14)$

***Mise au point p. 137 – Tout sauf #4, 5, 12, 15

b) $f_3(x) = -3x^2 + 12x + 10$

$f_3(x) = -3\left[\left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 - \frac{10}{3}\right]$

$f_3(x) = -3\left[\left(x - 2\right)^2 - \frac{22}{3}\right]$

$f_3(x) = -3\left(x - 2\right)^2 + 22$

a) $S\left(2, 22\right)$

b) $f_4(x) = 2x^2 + 3x + 4$

$f_4(x) = 2\left[\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} + 2\right]$

$f_4(x) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right]$

$f_4(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$

a) $S\left(\frac{-3}{4}, \frac{23}{8}\right)$

6. Voici trois fonctions quadratiques :

① $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ② $g(x) = -4x^2 - 16x - 16$ ③ $h(x) = -3x^2 + x - 4$

Pour chacune de ces fonctions, déterminez les propriétés suivantes :

a) L'équation de l'axe de symétrie
b) l'image de la fonction;
c) les coordonnées du sommet
d) l'ordonnée à l'origine
e) le maximum ou le minimum
f) les zéros
g) l'intervalle de croissance
h) l'intervalle de décroissance
i) les intervalles où la fonction est positive
j) les intervalles où la fonction est négative

① $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$f(x) = [(x^2 - 6x + 9) - 9 + 5]$

$f(x) = [(x - 3)^2 - 4]$

$f(x) = (x - 3)^2 - 4$

$0 = (x - 3)(x - 2)$

$x = 3$ ou $x = 2$

② $g(x) = -4x^2 - 16x - 16$

$g(x) = -4[(x^2 + 4x + 4) - 4 + 4]$

$g(x) = -4[(x + 2)^2]$

$g(x) = -4(x + 2)^2$

$0 = -4(x^2 + 4x + 4)$

$0 = -4(x + 2)(x + 2)$

$x = -2$ ou $x = -2$

③ $h(x) = -3x^2 + x - 4$

$h(x) = -3[(x^2 - {}^{1}/_{3}x + {}^{1}/_{36}) - {}^{1}/_{36} + {}^{4}/_{3}]$

$h(x) = -3[(x - {}^{1}/_{6})^2 + {}^{47}/_{36}]$

$h(x) = -3(x - {}^{1}/_{6})^2 - {}^{47}/_{12}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-3)(-4)}}{2(-3)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 48}}{-6}$ donc aucune racines

	1	2	3
a)	$x = 3$	$x = -2$	$x = \frac{1}{6}$
b)	$[-4, +\infty[$	$]-\infty, 0]$	$\left]-\infty, -\frac{47}{12}\right]$
c)	$(3, -4)$	$(-2, 0)$	$\left(\frac{1}{6}, -\frac{47}{12}\right)$
d)	5	-16	-4
e)	Minimum de -4	Maximum de 0	Maximum de $-\frac{47}{12}$
f)	1 et 5	-2	Aucun
g)	$[3, +\infty[$	$]-\infty, -2]$	$\left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$
h)	$]-\infty, 3]$	$[-2, +\infty[$	$\left[\frac{1}{6}, +\infty\right[$
i)	$]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$	$\{-2\}$	Aucun
j)	$[1, 5]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

***Mise au point p. 137 – Tout sauf #4, 5, 12, 15

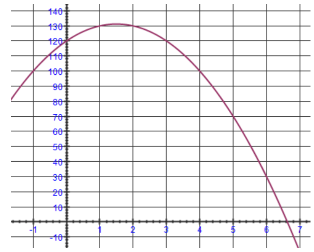
7. Du haut d'une falaise, à 120 m au-dessus du niveau de la mer, un appareil lance dans les airs un pigeon d'argile. On peut représenter sa hauteur h(t) (en m) par rapport au niveau de la mer selon le temps t écoulé (en s) depuis le lancement par l'équation $h(t) = 120 + 15t - 5t^2$.
   a) Après combien de temps le pigeon d'argile :
      1) Aura-t-il atteint sa hauteur maximale?

         $h(t) = -5[(t^2 - 3t + {}^9/_4) - {}^9/_4 - 24]$

         $h(t) = -5[(t - {}^3/_2)^2 - {}^{105}/_4]$

         $h(t) = -5(t - {}^3/_2)^2 + {}^{525}/_4$

         Il aura atteint sa hauteur maximale après 1,5 s.



      2) Aura-t-il atteint la mer? Alentour de 6,6 s.

   b) Le projectile d'un tireur atteint le pigeon d'argile à une hauteur de 130 m. Combien de temps après le lancement le pigeon a-t-il été atteint? À 1s ou 2s.

8. Il est possible de transformer la règle d'une fonction quadratique de la forme générale à la forme canonique en utilisant des manipulations algébriques. Observez l'exemple ci-contre.
   a) En procédant de la même façon, transformez les règles suivantes sous la forme canonique.

① $f_1(x) = x^2 - 4x + 1$

$f_1(x) = 1\left[\left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + 1\right]$

$f_1(x) = 1\left[\left(x - 2\right)^2 - 3\right]$

$f_1(x) = \left(x - 2\right)^2 - 3$

② $f_2(x) = x^2 + 3x - 4$

$f_2(x) = 1\left[\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 4\right]$

$f_2(x) = 1\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$

$f_2(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

③ $f_3(x) = x^2 - x - 1$

$f_3(x) = 1\left[\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 1\right]$

$f_3(x) = 1\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right]$

$f_3(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

   b) Pour toutes les fonctions précédentes, le paramètre a est égal à 1. Comment pourrait-on procéder, à l'aide de manipulations algébriques comme celles-ci-dessus, pour obtenir la forme canonique si le paramètre a était différent de 1? Appliquez votre méthode à la fonction $f_4(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

$f_4(x) = 3\left[\left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 + \frac{5}{3}\right]$

$f_4(x) = 3\left[\left(x - 1\right)^2 + \frac{2}{3}\right]$

$f_4(x) = 3\left(x - 1\right)^2 + 2$

9. Température – Il arrive parfois que, durant quelques heures, la température extérieure varie selon une fonction quadratique. Le graphique ci-contre représente les températures observées à Montréal entre 7h et 21 h durant une journée exceptionnelle de février. Le nuage de points a été modélisé à l'aide d'une fonction T dont la règle est inscrite sous le graphique.
   a) D'après ce modèle, quelle a été la température maximale de ce 5 février? À quel moment de la journée cette température a-t-elle été atteinte?

$T(x) = -0{,}028x^2 + 1{,}16x - 10{,}7$

$T(x) = -0{,}028[(x^2 - 41{,}4x + 428{,}49) - 428{,}49 + 382{,}14]$

$T(x) = -0{,}028[(x - 20{,}7)^2 - 46{,}35]$

$T(x) = -0{,}028(x - 20{,}7)^2 + 1{,}31$

***Mise au point p. 137 – Tout sauf #4, 5, 12, 15

La température maximale a été de 1,31°C vers 20h42.

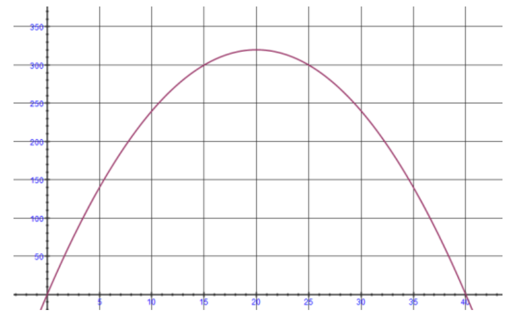
b) Vers quelle heure a-t-il fait 0 °C? vers 13h50.

c) Quelle est l'ordonnée à l'origine de cette fonction? Comment peut-on l'interpréter dans ce contexte? Si la température a suivi cette courbe, la température était de -10,7°C à minuit.

10. Frédéric est caricaturiste. Durant l'été, il propose ses services aux touristes. Il s'est aperçu que le prix qu'il exige pour faire une caricature a beaucoup d'effet sur le nombre de clients qu'il attire. En fait, la demande à laquelle sa petite entreprise doit répondre peut être modélisée à l'aide de la fonction $D(x) = 32 - 0{,}8x$, où x est le prix (en $) d'une caricature et $D(x)$, le nombre moyen de clients qu'il attire quotidiennement avec ce prix. Évidemment, plus le prix est élevé, moins il a de clients.

a) Déterminez la règle de la fonction $R(x)$ qui représente son revenu moyen quotidien en fonction du prix exigé.

$R(x) = x(D(x)) = x(32 - 0{,}8x) = -0{,}8x^2 + 32x$



b) Déterminez le domaine et l'image de la fonction R dans ce contexte.

$R(x) = -0{,}8[(x^2 - 40x + 400) - 400]$

$R(x) = -0{,}8[(x - 20)^2 - 400]$

$R(x) = -0{,}8(x - 20)^2 + 320$

Domaine : [0, 40], Image : [0, 320]

c) Que représentent les zéros de cette fonction dans ce contexte?

Les zéros sont 0 et 40, ils représentent la quantité de vente pour que le profit soit nul.

d) Quel prix devrait exiger Frédéric pour maximiser son revenu?

Il devra demander 20$ afin de maximiser ses revenus.

e) Quel prix devrait-il exiger pour s'assurer un revenu moyen de 250$ par jour :

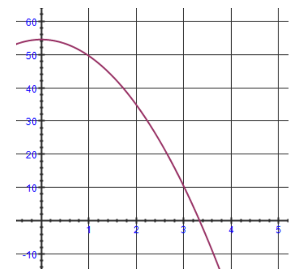
1) Si son intention est de se faire connaître? Alentour de 11$

2) Si son intention est de travailler le moins possible? Alentour de 29$.

***Mise au point p. 137 – Tout sauf #4, 5, 12, 15

11. Depuis toujours, les objets tombent. Mais ce n'est qu'aux XVIe et XVIIe siècles que les scientifiques ont vraiment compris les principes physiques et en mathématiques sous-jacents à ce phénomène. Galilée (1564-1642) et Newton (1642-1727) se sont particulièrement intéressés à la chute des corps. Leurs études ont permis d'en arriver au principe suivant :
Si un objet, immobile au départ, tombe en chute libre d'une hauteur de h_o mètres, la résistance de l'air étant négligeable, alors sa hauteur t secondes après son départ est d'environ $(h_o - 4{,}9t^2)$ mètres.
Ainsi, si on laisse tomber une bille du haut de la tour de Pise, on peut donc déterminer la hauteur de la bille au cours de sa chute selon le temps de chute par la fonction suivante : $h(t) = 54{,}5 - 4{,}9t^2$

a) Quelle distance la bille aura-t-elle parcourue :



1) Durant la première seconde de sa chute?

$h(1) = 54{,}5 - 4{,}9(1) = 49{,}6$

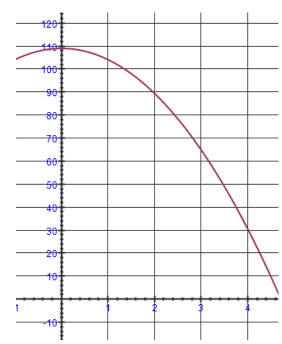
donc $54{,}5 - 49{,}6 = 4{,}9$ mètres

2) Durant les deux premières secondes de sa chute?

$h(2) = 54{,}5 - 4{,}9(2)^2 = 34{,}9$

donc $54{,}5 - 34{,}9 = 19{,}6$ mètres

b) Après combien de temps atteindra-t-elle le sol?



$0 = 54{,}5 - 4{,}9t^2$

$-54{,}5 = -4{,}9t^2$

$t^2 = 11{,}1$

$t = 3{,}3$

À environ 3,3 secondes.

c) Après combien de temps se trouvera-t-elle à 10m du sol?

$10 = 54{,}5 - 4{,}9t^2$

$-44{,}5 = -4{,}9t^2$

$t^2 = 9{,}08$

$t = 3{,}01$

À environ 3,01 secondes.

d) Répondez à nouveau aux questions a), b) et c) sachant qu'on lance cette même bille du haut d'une tour deux fois plus haute que la tour de Pise.

a)1) $h(t) = 109 - 4{,}9t^2$
$h(1) = 109 - 4{,}9 = 104{,}1$
$109 - 104{,}1 = 4{,}9$ m

a)(2) $h(t) = 109 - 4{,}9t^2$
$h(1) = 109 - 4{,}9(2)^2 = 89{,}4$
$109 - 89{,}4 = 19{,}6$ m

***Mise au point p. 137 – Tout sauf #4, 5, 12, 15

b)

$0 = 109 - 4{,}9t^2$

$-109 = -4{,}9t^2$

$22{,}24 = t^2$

$t = \pm 4{,}7$ sec

donc après 4,7 secondes

c)

$10 = 109 - 4{,}9t^2$

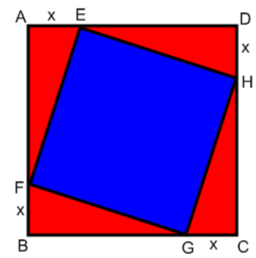
$-99 = -4{,}9t^2$

$20{,}2 = t^2$

$t = \pm 4{,}5$ sec

donc après 4,5 secondes

13. Un artiste désire fabriquer le vitrail carré de 60 cm de côté illustré ci-dessous. En plaçant quatre points à égale distance de chacun des sommets ABCD du grand carré, il crée un nouveau carré EFGH.



a) Définissez sous la forme générale la règle de la fonction f permettant de déterminer l'aire du carré EFGH en fonction de la distance x choisie.

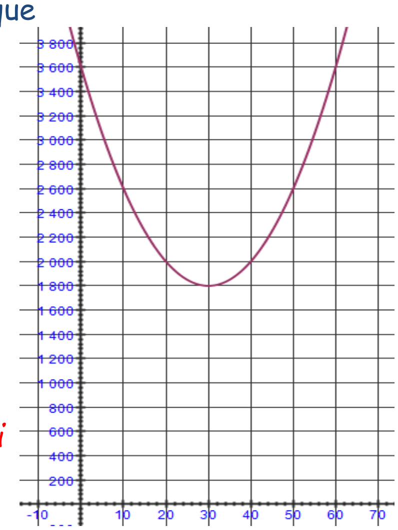
Aire du carré bleu $f(x) = x^2 + (60 - x)^2$

$f(x) = x^2 + 3600 - 120x + x^2$

$f(x) = 2x^2 - 120x + 3600$

b) Déterminez l'ordonnée à l'origine de cette fonction et indiquez ce que représente cette valeur dans le contexte actuel.

C'est l'aire du carré ABCD, si la longueur x est 0, les deux carrés ont la même taille.



c) Déterminez le minimum de cette fonction. Que représente cette valeur dans ce contexte?

$f(x) = 2[(x^2 - 60x + 900) - 900 + 1800]$

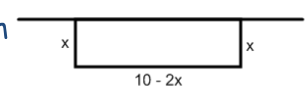
$f(x) = 2[(x - 30)^2 + 900]$

$f(x) = 2(x - 30)^2 + 1800$

L'aire minimale est de 1800 cm². C'est le plus petit carré qui touche les côtés du grand carré.

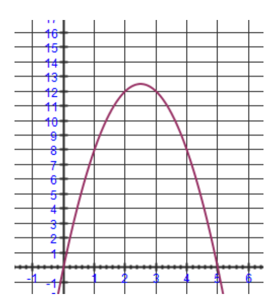
d) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction f. ↗ [30, 60], ↘[0, 30]

14. Le long d'un mur, on délimite un jardin rectangulaire à l'aide d'une clôture de 10 m de longueur. La variable x représente la mesure en mètres des deux côtés parallèles de la clôture comme indiqué dans le schéma ci-contre. L'aire du jardin peut s'exprimer comme une fonction quadratique de x.



a) Déterminez la règle de cette fonction sous sa forme générale.

$f(x) =$ Longueur x largeur $= x(10 - 2x) = -2x^2 + 10x$



b) Quel est le domaine de cette fonction dans ce contexte?

$f(x) = -2[(x^2 - 5x + 6{,}25) - 6{,}25]$

$f(x) = -2[(x - 2{,}5)^2 - 6{,}25]$

$f(x) = -2(x - 2{,}5)^2 + 12{,}5$

***Mise au point p. 137 – Tout sauf #4, 5, 12, 15

c) Quel est l'image de cette fonction?

Image : [0, 12,5]

d) Pour quelle valeur x, la fonction atteint-elle son maximum? 2,5 m

e) Quelles doivent être les dimensions du jardin pour que son aire soit exactement de 10 m^2?

$x = 1,4$ m ou $x = 3,6$m

donc $10 - 2(1,4) = 7,2$ m $10 - 2(3,6) = 2,8$ m

Alors, 1,4 m par 7,2 m ou 3,6 m par 2,8 m.