Math 30311 - B

Bloc 2 – Régularité et algèbre

***Mise au point p. 233 # 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 15, 19

1 Déterminez le nombre de solutions (0, 1 ou 2) de chacun des systèmes d'équations suivants. Justifiez votre réponse algébriquement ou graphiquement.

a) $y = x^2$
$y = x - 1$

$x^2 = x - 1$

$x^2 - x + 1 = 0$

$b^2 - 4ac$

$1 - 4 = -3$

0 solution

b) $y = 2x + 9$
$y = -x^2 + 8x$

$2x + 9 = -x^2 + 8x$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$b^2 - 4ac$

$36 - 36 = 0$

1 solution

c) $y = x^2 + x$
$x + 2y + 1 = 0$

$2y = -x - 1$

$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$x^2 + x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

$b^2 - 4ac$

$\frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$

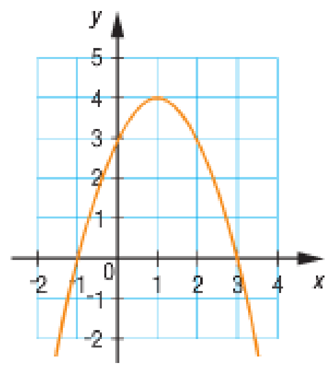
2 solutions

2 L'équation de la parabole représentée ci-contre est $y = -(x + 1)(x - 3)$. Parmi les droites définies ci-dessous, laquelle touche cette parabole en un seul point ?

$d_1 : 2x + y - 6 = 0$

$d_2 : 2x + y - 7 = 0$

$d_3 : 2x + y - 8 = 0$



d_1

$y = -(x+1)(x-3)$ et $y = -2x + 6$

$-x^2 + 3x - x + 3 = -2x + 6$

$0 = x^2 - 4x + 3$

$b^2 - 4ac$

$16 - 12 = 4$

2 solutions

d_2

$y = -(x+1)(x-3)$ et $y = -2x + 7$

$-x^2 + 3x - x + 3 = -2x + 7$

$0 = x^2 - 4x + 4$

$b^2 - 4ac$

$16 - 16 = 0$

1 solution

d_3

$y = -(x+1)(x-3)$ et $y = -2x + 8$

$-x^2 + 3x - x + 3 = -2x + 8$

$0 = x^2 - 4x + 5$

$b^2 - 4ac$

$16 - 20 = -4$

0 solution

La droite d_2 touche en un seul point.

***Mise au point p. 233 # 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 15, 19

3 Résolvez les systèmes d'équations suivants par la méthode de comparaison.

a) $y = x^2 + 2x - 15$
$y = 2x + 10$

$x^2 + 2x - 15 = 2x + 10$
$x^2 - 25 = 0$
$(x-5)(x+5) = 0$
$x = 5$ ou $x = -5$

si $x = 5$: $y = 10 + 10$, $y = 20$, $(5, 20)$

si $x = -5$: $y = -10 + 10$, $y = 0$, $(-5, 0)$

b) $y = x^2 - 10x + 10$
$y = x - 18$

$x^2 - 10x + 10 = x - 18$
$x^2 - 11x + 28 = 0$
$(x-7)(x-4) = 0$
$x = 7$ ou $x = 4$

Si $x = 7$: $y = 7 - 18$, $y = -11$, $(7, -11)$

Si $x = 4$: $y = 4 - 18$, $y = -14$, $(4, -14)$

c) $y = x - 8$
$y = x^2 - 3x - 4$

$x - 8 = x^2 - 3x - 4$
$0 = x^2 - 4x + 4$
$0 = (x-2)(x-2)$
$x = 2$
$y = 2 - 8$
$y = -6$
$(2, -6)$

d) $y = -2x^2 + 5x + 5$
$y = -2x + 12$

$-2x^2 + 5x + 5 = -2x + 12$
$0 = 2x^2 - 7x + 7$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(2)(7)}}{2(2)}$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{-7}}{4}$$
aucune solution

e) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$
$y = x^2 - 3x + 2$

$\frac{-1}{3}x + \frac{2}{9} = x^2 - 3x + 2$
$-3x + 2 = 9x^2 - 27x + 18$
$0 = 9x^2 - 24x + 16$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4(9)(16)}}{2(9)}$$
$$x = \frac{24 \pm \sqrt{0}}{18}$$
$$x = \frac{4}{3}$$
$$y = \frac{-1}{3}\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{2}{9}$$
$$y = \frac{-2}{9}$$
$$\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{9}\right)$$

f) $y = -3x^2 + 4x + 5$
$y = 3x + 4$

$-3x^2 + 4x + 5 = 3x + 4$
$0 = 3x^2 - x - 1$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Si $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$:
$$y = 3\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right) + 4$$
$$y = \frac{9 + \sqrt{13}}{2}$$
$$\left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6}, \frac{9 + \sqrt{13}}{2}\right)$$

Si $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$:
$$y = 3\left(\frac{1 - \sqrt{13}}{6}\right) + 4$$
$$y = \frac{9 - \sqrt{13}}{2}$$
$$\left(\frac{1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{9 - \sqrt{13}}{2}\right)$$

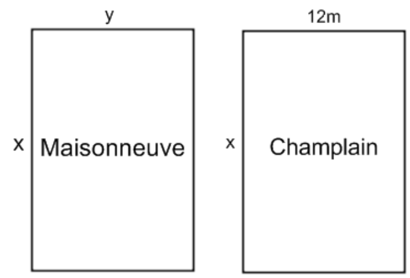
***Mise au point p. 233 # 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 15, 19

4 Dans chacun des parcs Maisonneuve et Champlain, il y a un enclos rectangulaire où les chiens peuvent circuler en toute liberté. L'enclos du parc Champlain a une largeur de 12 m et celui du parc Maisonneuve est délimité par une clôture de 120 m. Les deux enclos ont la même longueur.

a) À l'aide d'un système d'équations, exprimez l'aire de chacun des enclos en fonction de leur longueur.

b) Représentez la situation à l'aide d'une table de valeurs et d'un graphique.

c) Sachant que l'enclos du parc Champlain est plus grand que celui du parc Maisonneuve, déterminez quelle peut être la longueur des deux enclos.



Maisonneuve

$2x + 2y = 120$

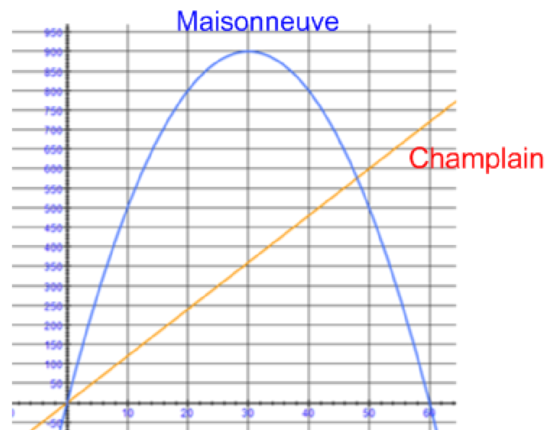
$y = \dfrac{120 - 2x}{2} = -x + 60$

$Aire = xy = x(-x + 60)$

Champlain

$Aire = 12x$

Longueur	20	30	40	50	60
$Aire_{Champlain}$	240	360	480	600	720
$Aire_{Maisonneuve}$	800	900	800	500	0



c)
$$-x^2 + 60x = 12x$$
$$0 = x^2 - 48x$$
$$0 = x(x - 48)$$
$$x = 0 \quad ou \quad x = 48$$

L'aire du parc Champlain serait plus grande que celle du parc Maisonneuve pour une longueur en 48 m et 60m.

5 La trajectoire parabolique d'un mobile se situe dans le même plan que celle d'un rayon laser. On peut les représenter dans un plan cartésien dont l'origine correspond au point de départ du mobile et où l'unité de mesure utilisée est le mètre. Les équations associées à ces deux trajectoires sont:

$$y = -0{,}2x^2 + 2x$$
$$y = 0{,}5x + 0{,}7$$

a) Représentez graphiquement cette situation.

b) Déterminez la hauteur du mobile chaque fois qu'il croise le rayon laser.

$$-0{,}2x^2 + 2x = 0{,}5x + 0{,}7$$
$$0 = 0{,}2x^2 - 1{,}5x + 0{,}7$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 4(0{,}2)(0{,}7)}}{2(0{,}2)}$$

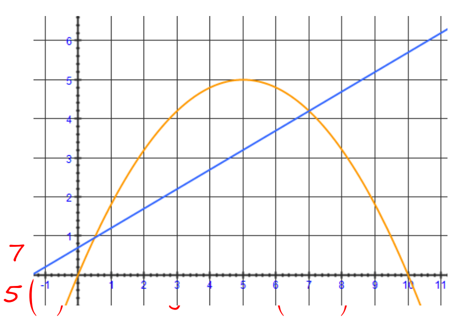
$$x = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{1{,}69}}{0{,}4}$$
$$x = \frac{1{,}5 \pm 1{,}3}{0{,}4}$$
$$x = \frac{1{,}5 + 1{,}3}{0{,}4} = \frac{2{,}8}{0{,}4} = 7$$
$$x = \frac{1{,}5 - 1{,}3}{0{,}4} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$$

Si $x = 7$

$y = 0{,}5($

$y = 4{,}2$

$y = 0{,}95$



Il croise le rayon laser à une hauteur de 4,2m et 0,95m.

***Mise au point p. 233 # 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 15, 19

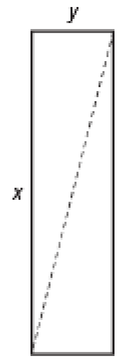
7 Le périmètre du rectangle ci-contre est de 12,4 unités et sa diagonale mesure 5 unités.

a) Traduisez cette situation par un système d'équations.

b) Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

c) Est-il possible de construire un rectangle qui a le même périmètre et dont la diagonale mesure :

1) 6 unités ? 2) 7 unités ?



a) $2x + 2y = 12,4$
$5^2 = x^2 + y^2$

b) $2y = -2x + 12,4$
$y = -x + 6,2$

$25 = x^2 + y^2$
$25 = x^2 + (-x + 6,2)^2$
$0 = x^2 + x^2 - 6,2x - 6,2x + 38,44 - 25$
$0 = 2x^2 - 12,4x + 13,44$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = \frac{12,4 \pm \sqrt{153,76 - 4(2)(13,44)}}{2(2)}$
$x = \frac{12,4 \pm \sqrt{46,24}}{4} = \frac{12,4 \pm 6,8}{4}$
$x = \frac{12,4 + 6,8}{4} = 4,8$
$x = \frac{12,4 - 6,8}{4} = 1,4$

Si $x = 4,8$
$y = -4,8 + 6,2 = 1,4$
Si $x = 1,4$
$y = -1,4 + 6,2 = 4,8$

Les dimensions sont de 1,4unités par 4,8unités.

9 Une parabole ayant son sommet au point S(5, 2) croise une droite au point P(3, 0). Sachant que la pente de la droite est -2, déterminez les coordonnées du deuxième point d'intersection entre cette parabole et cette droite.

$y = a(x-h)^2 + k$
$0 = a(3-5)^2 + 2$
$-2 = a(-2)^2$
$a = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$
$y = \frac{-1}{2}(x-5)^2 + 2$

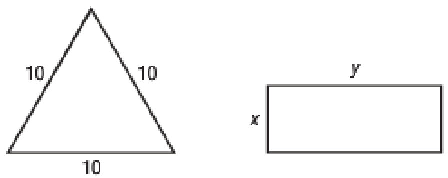
$y = ax + b$
$0 = -2(3) + b$
$b = 6$
$y = -2x + 6$

$\frac{-1}{2}(x-5)^2 + 2 = -2x + 6$
$x^2 - 10x + 25 - 4 = 4x - 12$
$x^2 - 14x + 33 = 0$
$(x-11)(x-3) = 0$
$x = 11$ ou $x = 3$

Si $x = 11$
$y = -2x + 6$
$y = -2(11) + 6$
$y = -16$
$(11, -16)$

***Mise au point p. 233 # 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 15, 19

12 Soit un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 10 cm. On veut construire un rectangle qui aurait la même aire et le même périmètre que celui-ci.



a) Traduisez cette situation par un système d'équations.

b) Résolvez le système d'équations pour démontrer qu'un tel rectangle existe, puis déterminez ses dimensions.

a)

hauteur du triangle

$$10^2 = 5^2 + h^2$$
$$100 - 25 = h^2$$
$$75 = h^2$$
$$h = 8{,}66$$

aire du triangle

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{10(8{,}66)}{2}$$
$$= 43{,}3\text{cm}^2$$

$$\text{Périmètre} = 30\text{cm}$$

aire du rec tan gle

$$A = xy = 43{,}3$$

Périmètre

$$p = 2x + 2y = 30$$

b)

$$2y = -2x + 30$$
$$y = -x + 15$$

$$xy = 43{,}3$$
$$x(-x + 15) = 43{,}3$$
$$-x^2 + 15x - 43{,}3 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 4(-1)(-43{,}3)}}{2(-1)}$$
$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{51{,}8}}{-2} = \frac{-15 \pm 7{,}2}{-2}$$
$$x = \frac{-15 + 7{,}2}{-2} = 3{,}9$$
$$x = \frac{-15 - 7{,}2}{-2} = 11{,}1$$

Si $x = 3{,}9$

$$y = -3{,}9 + 15 = 11{,}1$$

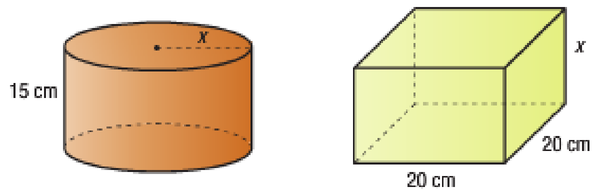
Si $x = 11{,}1$

$$y = -11{,}1 + 15 = 3{,}9$$

Les dimensions sont de 11,1 cm par 3,9 cm.

***Mise au point p. 233 # 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 15, 19

14 Une entreprise fabrique des contenants en plastique qui ont la forme de cylindre droit et de prisme droit à base carrée. Les dimensions (en cm) de ces contenants sont indiquées dans la figure ci-dessous. Le rayon du cylindre est égal à la hauteur du prisme.



a) Exprimez l'aire totale de chaque contenant en fonction de la variable *x*.

b) Pour quelle valeur de *x* ces deux contenants ont-ils la même aire totale? Arrondissez au dixième près.

$$A_{cylindre} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi x(15) + 2\pi x^2 = 30\pi x + 2\pi x^2$$

$$A_{prisme} = 2Ll + 2Lh + 2lh = 2(20)(20) + 2(20)x + 2(20)x = 800 + 40x + 40x = 800 + 80x$$

$$30\pi x + 2\pi x^2 = 800 + 80x$$

$$2\pi x^2 + x(30\pi - 80) - 800 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-30\pi + 80 \pm \sqrt{(30\pi - 80)^2 - 4(2\pi)(-800)}}{2(2\pi)}$$

Ils auront la même aire pour x = 10,2 cm.

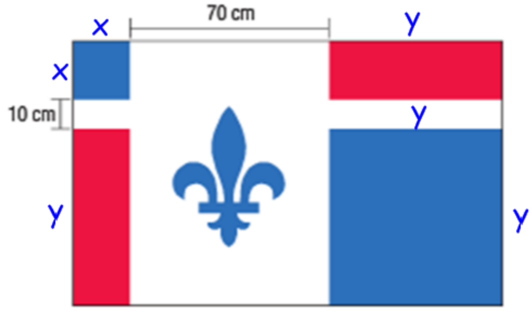
$$x = \frac{-14,25 \pm \sqrt{20309,19}}{12,57} = \frac{-14,25 \pm 142,5}{12,57}$$

$$x = \frac{-14,25 + 142,5}{12,57} = 10,2$$

$$x = \frac{-14,25 - 142,5}{12,57} = -12,5 \text{ à rejeter}$$

***Mise au point p. 233 # 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 15, 19

15 On a créé le drapeau ci-dessous en s'inspirant du drapeau du Québec et de celui de la France. L'aire totale des deux carrés bleus qui se trouvent dans les coins supérieur gauche et inférieur droit du drapeau est de 4000 cm². Déterminez les dimensions de ce drapeau, sachant que le rapport de sa longueur à sa largeur est de 5 : 3.



$$x^2 + y^2 = 4000$$
$$\frac{x+y+70}{5} = \frac{x+y+10}{3}$$

$$\frac{x+y+70}{5} = \frac{x+y+10}{3}$$
$$3x + 3y + 210 = 5x + 5y + 50$$
$$-2y = 2x - 160$$
$$y = -x + 80$$

$$x^2 + y^2 = 4000$$
$$x^2 + (-x+80)^2 = 4000$$
$$x^2 + x^2 - 160x + 6400 - 4000 = 0$$
$$2x^2 - 160x + 2400 = 0$$
$$x^2 - 80x + 1200 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{80 \pm \sqrt{(80)^2 - 4(1)1200}}{2(1)}$$
$$x = \frac{80 \pm \sqrt{1600}}{2} = \frac{80 \pm 40}{2}$$
$$x = \frac{80+40}{2} = 60$$
$$x = \frac{80-40}{2} = 20$$

Si $x = 60$
$y = -60 + 80 = 20$
Si $x = 20$
$y = -20 + 80 = 60$

Ce drapeau mesure 90 cm par 150 cm.

19 Soit deux nombres différents. Si on soustrait le second nombre du triple du premier, on obtient le même résultat que si on soustrait du carré du premier nombre le double du second, soit 8 dans les deux cas. Quels sont ces nombres ?

x : le 1er nombre
y : le 2e nombre

$$3x - y = 8$$
$$x^2 - 2y = 8$$

$$3x - 8 = y$$
$$x^2 - 2(3x-8) = 8$$
$$x^2 - 6x + 16 - 8 = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x-4)(x-2) = 0$$
$$x = 4 \text{ ou } x = 2$$

Si $x = 4$
$y = 3(4) - 8 = 4$
à rejeter car ils sont pareils
Si $x = 2$
$y = 3(2) - 8 = -2$

Les 2 nombres sont 2 et -2.