Math 30321 - B

Bloc 2 – Régularité et algèbre

Feuillet p. 5

1. Résous

a) $|3-x| < 8$

$3-x=8$ ou $3-x=-8$

$-x=5$ $\quad -x=-11$

$x=-5$ $\quad x=11$

$-5 \quad 11$

$]-5, 11[$

b) $|x+3|+3 \leq 9$

$x+3=6$ ou $x+3=-6$

$x=3$ $\quad x=-9$

$-9 \quad 3$

$[-9, 3]$

c) $|3a+1| > 3a+5$

$3a+1=3a+5$ ou $3a+1=-3a-5$

$0x=4$ $\quad 6a=-6$

$\varnothing$ $\quad a=-1$

-1

$]-\infty, -1[$

d) $2(3)^{2x+1} > 12$

$3^{2x+1}=6$

$\log_3 6 = 2x+1$

$1,6309 = 2x+1$

$2x = 0,6309$

$x = 0,3155$

$]-\infty ; 0,3155[$

e) $3(2)^{2x+1} \leq 12$

$2^{2x+1} = 4$

$2^{2x+1} = 2^2$

$2x+1 = 2$

$2x = 1$

$x = 0,5$

$]0,5 ; \infty[$

f) $2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \leq \frac{1}{16}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \frac{1}{32}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$2x+1 = 5$

$2x = 4$

$x = 2$

$[2, \infty[$

2. Un récipient contient 20 verres de jus d'orange pur. Durant des journées chaudes, Mario en boit souvent, mais toujours un seul verre à la fois. Cependant, afin que la quantité de jus dure plus longtemps, il remplit d'eau le récipient, chaque fois qu'il prend un verre de jus.

a) Détermine la fonction exponentielle représentant la quantité de jus d'oranges pur après que Mario en a bus n verres.

$a = 20$

$c = \frac{19}{20}$

$x = n$

$f(x) = a(c)^x$

$f(n) = 20\left(\frac{19}{20}\right)^n$

b) Après combien de verres reste-t-il moins de 10 verres de jus pur ?

$a = 20$

$c = \frac{19}{20}$

$f(x) < 10$

$f(x) = a(c)^x$

$10 < 20\left(\frac{19}{20}\right)^x$

$0,5 = \left(\frac{19}{20}\right)^x$

$\log_{\frac{19}{20}} 0,5 = x$

$x = 13,5$

Il reste moins de 10 verres après 14 verres.

Feuillet p. 5

3. La quantité d'encre d'un ruban de machine à écrire diminue de 0,5% à chaque déroulement. On doit remplacer le ruban lorsqu'il reste moins de 60% d'encre. Quel sera le nombre de déroulement requis avant de changer le ruban ?

$a = 100\%$
$c = 100\% - 0,5\% = 99,5\%$
$f(x) < 60\%$

$$f(x) = a(c)^x$$
$$60\% > 100\%(0,995)^x$$
$$0,6 = (0,995)^x$$
$$\log_{0,995} 0,6 = x$$
$$x = 101,9$$

Il faudrait 102 déroulements.

4. La population des oiseaux augmente au rythme de 2% chaque année. Dans la région du Niagara, il y avait, en 1990, environ 100000 geais bleus.

   a) Détermine la population qu'il y avait en 1995.

$a = 100\text{milles}$
$c = 100\% + 2\% = 102\%$
$x = 5$
$f(x) = ?$

$$f(x) = a(c)^x$$
$$f(x) = 100(1,02)^5$$
$$f(x) = 110,408$$

il y avait 110408 geais bleus.

   b) Si la tendance s'est maintenue, combien de geais bleus y a-t-il aujourd'hui dans cette région ?

$a = 100\text{milles}$
$c = 100\% + 2\% = 102\%$
$x = 24$
$f(x) = ?$

$$f(x) = a(c)^x$$
$$f(x) = 100(1,02)^{24}$$
$$f(x) = 160843$$

il y aurait 160843 geais bleus.

5. Il y a 20 fois plus d'écureuils rouges que de gris dans le parc Algonquin. La population des écureuils gris augmente au rythme annuel de 10%, tandis que celle des écureuils rouges diminue annuellement de 5%. En combien d'années y aura-t-il plus d'écureuils gris que de rouges ?

y = nombre d'écureuils rouges
z = nombre d'écureuils gris
$y = 20z$

$$y(100\% - 5\%)^x < z(100\% + 10\%)^x$$
$$20z(0,95)^x = z(1,1)^x$$
$$20 = \frac{z(1,1)^x}{z(0,95)^x} = (1,15789)^x$$
$$\log_{1,15789} 20 = x$$
$$x = 20,4$$

il faudrait 21 ans.

Feuillet p. 5

6. Une balle de tennis contient de l'azote (gaz qui ne décomposera pas le caoutchouc) sous une pression de 200kPa. Cette pression diminue au rythme de 0,1%, chaque fois que la balle est frappée par un joueur. Lorsque la pression atteint 150 kPa, on considère que la balle est trop molle pour le jeu. Alors combien de fois peut-t-on frapper une balle avant de la remplacer ?

$a = 200\text{kPa}$
$c = 100\% - 0{,}1\% = 0{,}999$
$f(x) = 150\text{kPa}$
$x = ?$

$$f(x) = a(c)^x$$
$$150 = 200(0{,}999)^x$$
$$0{,}75 = (0{,}999)^x$$
$$\log_{0{,}999} 0{,}75 = x$$
$$x = 287{,}5$$

On peut frapper la balle 287 fois.

7. Un lundi, l'ordinateur de William et ceux de deux de ses amis sont infectés par un virus informatique qui se propage par les boites de courriels. Chaque jour qui suit, un ordinateur infecté en contamine huit autres.

a) Combien de nouveaux ordinateurs sont infectés au cours du lundi de la semaine suivante ?

$a = 3$ ordinateurs
$c = 8$
$f(x) = ?$
$x = 7$ jours

$$f(x) = a(c)^x$$
$$f(x) = 3(8)^7$$
$$f(x) = 6291456$$

6291456 ordinateurs seraient infectés.

b) Après combien de journée y aura-t-il plus de 12288 ordinateurs infectés ?

$a = 3$ ordinateurs
$c = 8$
$f(x) = 12288$
$x = ?$

$$f(x) = a(c)^x$$
$$12288 = 3(8)^x$$
$$\log_8 4096 = x$$
$$x = 4$$

Il faudrait 4 jours.

8. Depuis quelques années, la ville de Dubaï, dans les Émirats arabes unis, connait une croissance démographique exponentielle de l'ordre de 16% par année. En 2008, on estimait sa population à 1500000 habitants.

a) Quelle règle nous permet de calculer la population de Dubaï à partir de 2008 ?

$a = 1{,}5$ millions
$c = 100\% + 16\% = 1{,}16$

$$f(x) = a(c)^x$$
$$f(x) = 1{,}5(1{,}16)^x$$

b) A partir de quelle année la population sera-t-elle au-dessus de 1700000 ?

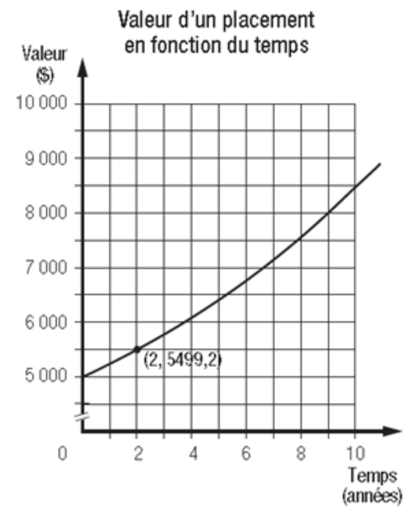
Feuillet p. 5

$a = 1{,}5$ millions
$c = 100\% + 16\% = 1{,}16$
$f(x) > 1{,}7$ millions

$f(x) = a(c)^x$
$1{,}7 = 1{,}5(1{,}16)^x$
$1{,}133 = (1{,}16)^x$
$\log_{1{,}16} 1{,}133 = x$
$x = 0{,}84$

1an = 12mois
0,84an = x
x = 10mois

9. Rebecca a représenté dans le graphique ci-dessous la progression de la valeur d'un de ses placements au cours des dernières années.



a) Quelle somme Rebecca a-t-elle placée initialement ? 5000$

b) Donne la règle de cette fonction.

$a = 5000\$$
$(2; 5499{,}2)$

$f(x) = 5000(c)^x$
$5499{,}2 = 5000(c)^2$
$1{,}09984 = c^2$
$c = 1{,}0487$

$f(x) = 5000(c)^x$
$f(x) = 5000(1{,}0487)^x$

c) Après combien d'année le placement sera-t-il plus de 9500$?

$a = 5000\$$
$c = 1{,}0487$
$f(x) > 9500\$$

$f(x) = 5000(c)^x$
$9500 < 5000(1{,}0487)^x$
$1{,}9 = (1{,}0487)^x$
$\log_{1{,}0487} 1{,}9 = x$
$13{,}5 = x$

Le placement sera plus de 9500$ après 13,5 années.

10. Une culture bactérienne compte au départ 5000 bactéries. Après six heures, on estime qu'elle en contient 80000. Combien de temps faut-il à cette bactérie pour doubler sa population ?

$a = 5000\$$
$(6, 80000)$

$f(x) = 5000(c)^x$
$80000 = 5000(c)^6$
$16 = c^6$
$c = 1{,}5874$

$f(x) = 5000(1{,}5874)^x$
$10000 = 5000(1{,}5874)^x$
$2 = (1{,}5874)^x$
$\log_{1{,}5874} 2 = x$
$x = 1{,}5$

Il faudrait 1,5 heures.

Feuillet p. 5

11. Environ combien de temps faudra-t-il pour qu'un placement de 8000$ augmente jusqu'à 12000$ s'il investit à 9% d'intérêt par année, composée mensuellement ?

$a = 8000\$$

$c = 100\% + 9\% / 12 = 1{,}0075$

$f(x) = 12000\$$

$x = 12n$

$12000 = 8000(1{,}0075)^{12n}$

$1{,}5 = (1{,}0075)^{12n}$

$\log_{1{,}0075} 1{,}5 = 12n$

$12n = 54{,}26$

$n = 4{,}52$

Il faudrait 4,5 ans.

12. La demi-vie du carbone 14 est d'environ 5730 ans. Trouve l'âge d'un échantillon dont 18% du nucléide radioactif d'origine ont été réduits.

$a = 100\%$

$f(x) = 100\% - 18\% = 0{,}72$

$c = \frac{1}{2}$

$x = \frac{n}{5730}$

$72\% = 100\%(0{,}5)^{\frac{n}{5730}}$

$0{,}72 = (0{,}5)^{\frac{n}{5730}}$

$\log_{0{,}5} 0{,}72 = \frac{n}{5730}$

$n = 5730 \times 0{,}47393 = 2715{,}6$

Il serait 2715,6 années de vieux.