Math 30321 - B

Bloc 1 – Régularité et algèbre

***Pages 373 à 377 : 5acf, 7ace, 10, 12, 14, 15, 17, 21, 22**

5 Résolvez les équations suivantes.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 28$

$\log_{\frac{1}{2}} 28 = x + 2$

$-4,807 = x + 2$

$x = -6,807$

c) $13^{\frac{2-x}{4}} = \frac{3}{8}$

$\log_{13} \frac{3}{8} = \frac{2-x}{4}$

$-0,3824 = \frac{2-x}{4}$

$2 - x = -1,5296$

$-x = -3,5296$

$x = 3,5296$

f) $21^{4x} = 0,35$

$\log_{21} 0,35 = 4x$

$-0,3448 = 4x$

$x = -0,0862$

7 Pour chacune des fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = 2(3)^{x-5} - 7$

$0 = 2(3)^{x-5} - 7$

$7 = 2(3)^{x-5}$

$(3)^{x-5} = 3,5$

$\log_3 3,5 = x - 5$

$x - 5 = 1,14$

$x = 6,14$

c) $h(x) = 0,5(3)^{5-x} - 2$

$0 = 0,5(3)^{5-x} - 2$

$2 = 0,5(3)^{5-x}$

$(3)^{5-x} = 5$

$\log_3 5 = 5 - x$

$5 - x = 1,4650$

$-x = -3,535$

$x = 3,535$

e) $j(x) = -4^x + 5$

$0 = -4^x + 5$

$-5 = -4^x$

$4^x = 5$

$\log_4 5 = x$

$x = 1,161$

$-x = -3,535$

$x = 3,535$

10 La valeur V (en \$) d'un placement évolue selon la règle $V = 15\,000(1,015)^{2t}$, où t est le temps (en années). À quel moment la valeur du placement est-elle de :

a) 15 000 \$? b) 20 000 \$? c) 22 000 \$?

a)

$15000 = 15000(1,015)^{2t}$

$1 = (1,015)^{2t}$

$\log_{1,015} 1 = 2t$

$2t = 0$

$t = 0$

b)

$20000 = 15000(1,015)^{2t}$

$1,3333 = (1,015)^{2t}$

$\log_{1,015} 1,3333 = 2t$

$2t = 19,32$

$t = 9,66$

c)

$22000 = 15000(1,015)^{2t}$

$1,4667 = (1,015)^{2t}$

$\log_{1,015} 1,4667 = 2t$

$2t = 25,72$

$t = 12,86$

12 Camille place la somme de 1500 \$ qu'elle a reçue en bourse d'études dans un compte où le taux d'intérêt annuel est de 3,5 % et où les intérêts sont composés tous les 6 mois. À quel moment la valeur du placement atteint-elle 2500 \$?

$a = 1500$

$c = 1 + \frac{3,5\%}{2} = 1,0175$

$f(x) = 2500\$$

$2500 = 1500(1,0175)^{2x}$

$1,6667 = (1,0175)^{2x}$

$\log_{1,0175} 1,6667 = 2x$

$2x = 29,445$

$t = 14,7$

Au bout d'environ 14,7 années.

***Pages 373 à 377 : 5acf, 7ace, 10, 12, 14, 15, 17, 21, 22**

14 **SITE D'ENFOUISSEMENT** Voici quelques renseignements concernant la dégradation de différents produits dans un site d'enfouissement :

Dégradation de différents produits

Produit	Règle qui définit le pourcentage P de la masse subsistant x années après l'enfouissement
Sac en plastique	$P = 2(0{,}9985)^x - 1$
Mouchoir de papier	$P = 2(0{,}0625)^x - 1$
Carton de lait	$P = 2(0{,}9862)^x - 1$
Gomme à mâcher	$P = 2(0{,}8706)^x - 1$
Pile alcaline	$P = 2(0{,}9999)^x - 1$

Pour chacun de ces produits, calculez le temps nécessaire à sa dégradation complète.

sac en plastique

$0 = 2(0{,}9985)^x - 1$
$1 = 2(0{,}9985)^x$
$(0{,}9985)^x = 0{,}5$
$\log_{0{,}9985} 0{,}5 = x$
$x = 461{,}75$ ans

mouchoir de papier

$0 = 2(0{,}0625)^x - 1$
$1 = 2(0{,}0625)^x$
$(0{,}0625)^x = 0{,}5$
$\log_{0{,}0625} 0{,}5 = x$
$x = 0{,}25$ an

carton de lait

$0 = 2(0{,}9862)^x - 1$
$1 = 2(0{,}9862)^x$
$(0{,}9862)^x = 0{,}5$
$\log_{0{,}9862} 0{,}5 = x$
$x = 49{,}88$ ans

gomme à mâcher

$0 = 2(0{,}8706)^x - 1$
$1 = 2(0{,}8706)^x$
$(0{,}8706)^x = 0{,}5$
$\log_{0{,}8706} 0{,}5 = x$
$x = 5$ ans

gomme à mâcher

$0 = 2(0{,}9999)^x - 1$
$1 = 2(0{,}9999)^x$
$(0{,}9999)^x = 0{,}5$
$\log_{0{,}9999} 0{,}5 = x$
$x = 6931{,}13$ ans

15 Dans une région tropicale, la température journalière T (en °C) varie selon la règle $T = 2s + 20$, où s représente le temps écoulé (en semaines) depuis le 1er mai. Dans cette région, la densité D des populations larvaires de moustiques (en nombre de larves/m³ d'eau) dans les étangs évolue selon la règle $D = 0{,}1(1{,}26)^T$, où T correspond à la température journalière (en °C). Les autorités de la santé publique considèrent qu'une mise en garde doit être émise lorsque la densité larvaire atteint 200 larves/m³ d'eau. Combien de temps après le 1er mai la mise en garde doit-elle être émise ?

$D = 0{,}1(1{,}26)^{2s+20}$
$\frac{200}{0{,}1} = \frac{0{,}1(1{,}26)^{2s+20}}{0{,}1}$
$2000 = (1{,}26)^{2s+20}$
$\log_{1{,}26} 2000 = 2s + 20$
$32{,}89 = 2s + 20$
$12{,}89 = 2s$
$s = 6{,}44$

Il faudra les avertir vers la mi juin.

***Pages 373 à 377 : 5acf, 7ace, 10, 12, 14, 15, 17, 21, 22

17 Une entreprise de téléphonie cellulaire voit son nombre N d'abonnés augmenter selon la règle $N = 15\ 000(1{,}15)^t$, où t correspond au temps écoulé (en années) depuis l'installation de son réseau. La capacité maximale du réseau est de 500 000 abonnés. À quel moment ce réseau atteint-il sa capacité maximale?

$N = 15000(1{,}15)^t$

$\frac{500000}{15000} = \frac{15000(1{,}15)^t}{15000}$

$33{,}33 = (1{,}15)^t$

$\log_{1{,}15} 33{,}33 = t$

$t = 25{,}09$années

Il aura atteint sa capacité au bout de 25 ans.

21 En finance, pour le calcul des intérêts composés continuellement, on utilise la règle $A = Pe^{rt}$, où A représente la valeur finale (en \$) d'un placement ou d'un emprunt P (en \$) à un taux d'intérêt annuel r pendant t années.

a) À quel taux d'intérêt doit-on placer un montant de 5000 \$ pour qu'il:

1) atteigne 7500 \$ en 5 ans? 2) double en 12 ans? 3) triple en 24 ans?

1)
$A = 7500\$$
$P = 5000\$$
$t = 5ans$
$r = ?$

$A = Pe^{rt}$

$7500 = 5000e^{r(5)}$

$\frac{7500}{5000} = \frac{5000e^{5r}}{5000}$

$1{,}5 = e^{5r}$

$\ln 1{,}5 = 5r$

$r = 0{,}08109$

$r = 8{,}109\%$

2)
$A = 10000\$$
$P = 5000\$$
$t = 12ans$
$r = ?$

$A = Pe^{rt}$

$10000 = 5000e^{r(12)}$

$\frac{10000}{5000} = \frac{5000e^{12r}}{5000}$

$2 = e^{12r}$

$\ln 2 = 12r$

$r = 0{,}05776$

$r = 5{,}776\%$

3)
$A = 15000\$$
$P = 5000\$$
$t = 24ans$
$r = ?$

$A = Pe^{rt}$

$15000 = 5000e^{r(24)}$

$\frac{15000}{5000} = \frac{5000e^{24r}}{5000}$

$3 = e^{24r}$

$\ln 3 = 24r$

$r = 0{,}04578$

$r = 4{,}578\%$

b) Pendant combien de temps doit-on placer un montant de 8000 \$ à un taux d'intérêt annuel de 4,5 % pour qu'il:

1) atteigne 10 000 \$? 2) double? 3) triple?

1)
$A = 10000\$$
$P = 8000\$$
$t = ?$
$r = 4{,}5\%$

$A = Pe^{rt}$

$10000 = 8000e^{4{,}5\%t}$

$\frac{10000}{8000} = \frac{8000e^{4{,}5\%t}}{8000}$

$1{,}25 = e^{4{,}5\%t}$

$\ln 1{,}25 = 4{,}5\%t$

$t = 5ans$

2)
$A = 16000\$$
$P = 8000\$$
$t = ?$
$r = 4{,}5\%$

$A = Pe^{rt}$

$16000 = 8000e^{4{,}5\%t}$

$\frac{16000}{8000} = \frac{8000e^{4{,}5\%t}}{8000}$

$2 = e^{4{,}5\%t}$

$\ln 2 = 4{,}5\%t$

$t = 15{,}4ans$

3)
$A = 24000\$$
$P = 8000\$$
$t = ?$
$r = 4{,}5\%$

$A = Pe^{rt}$

$24000 = 8000e^{4{,}5\%t}$

$\frac{24000}{8000} = \frac{8000e^{4{,}5\%t}}{8000}$

$3 = e^{4{,}5\%t}$

$\ln 3 = 4{,}5\%t$

$t = 24{,}4ans$

c) Établissez la règle permettant de calculer:

1) le taux d'intérêt requis pour qu'un placement P double après t années;

2) le temps requis pour qu'un placement P double s'il est placé à un taux d'intérêt annuel r.

1)
$A = 2P$
$P = P$
$t = t$
$r = ?$

$A = Pe^{rt}$

$2P = Pe^{rt}$

$2 = e^{rt}$

$\ln 2 = rt$

$r = \frac{\ln 2}{t}$

2)
$A = 2P$
$P = P$
$t = ?$
$r = r$

$A = Pe^{rt}$

$2P = Pe^{rt}$

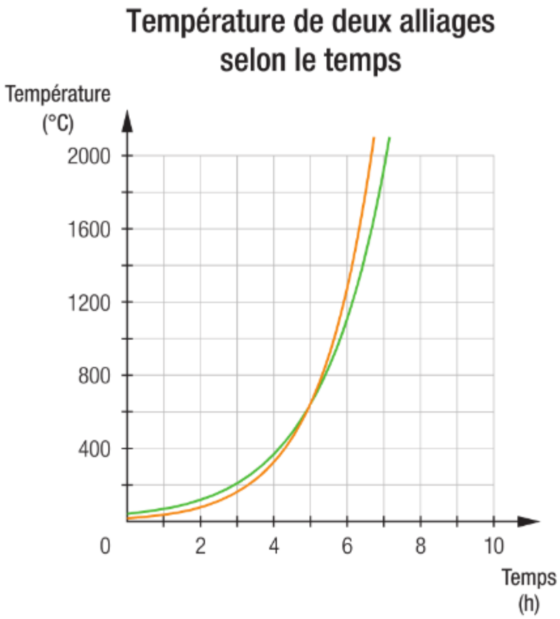
$2 = e^{rt}$

$\ln 2 = rt$

$t = \frac{\ln 2}{r}$

***Pages 373 à 377 : 5acf, 7ace, 10, 12, 14, 15, 17, 21, 22**

22 Le graphique ci-dessous indique la température de deux alliages selon le temps passé dans deux fours séparés.



La température du premier alliage évolue selon la règle $T = 20(2)^x$ et celle du second alliage, selon la règle $T = 40(4)^{\frac{2x}{5}}$, où T représente la température (en °C) et x, le temps (en h).

a) Pour chacun des alliages, déterminez la température initiale.

b) À quel moment la température des deux alliages est-elle la même ?

c) À quel moment la température du premier alliage est-elle égale au double de celle du second alliage ?

a)
$T = 20(2)^x$
$T = 20(2)^0$
$T = 20°C$

et

$T = 40(4)^{\frac{2x}{5}}$
$T = 40(4)^0$
$T = 40°C$

b)
$20(2)^x = 40(4)^{\frac{2x}{5}}$
$(2)^x = 2(2^2)^{\frac{2x}{5}}$
$(2)^x = (2)^{2\times\frac{2x}{5}+1}$
$x = 2 \times \frac{2x}{5} + 1$
$5x = 4x + 5$
$x = 5$
après 5 heures

c)
$20(2)^x = 2 \times 40(4)^{\frac{2x}{5}}$
$(2)^x = 2 \times 2(2^2)^{\frac{2x}{5}}$
$(2)^x = (2)^{2\times\frac{2x}{5}+1+1}$
$x = 2 \times \frac{2x}{5} + 2$
$5x = 4x + 10$
$x = 10$
après 10 heures