Math 30331 - C

Bloc 4 – Régularité et algèbre

Feuillet p. 8

1. Détermine le centre et le rayon du cercle :

a) $x^2 + 6x + y^2 - 14y = 23$

$$\left(x^2 + 6x + 9\right) - 9 + \left(y^2 - 14y + 49\right) - 49 = 23$$
$$\left(x + 3\right)^2 + \left(y - 7\right)^2 = 81$$
$$C\left(-3, 7\right), r = 9$$

b) $x^2 - 14x + y^2 + 22y + 26 = 0$

$$\left(x^2 - 14x + 49\right) - 49 + \left(y^2 + 22y + 121\right) - 121 = -26$$
$$\left(x - 7\right)^2 + \left(y + 11\right)^2 = 144$$
$$C\left(7, -11\right), r = 12$$

c) $x^2 - \frac{4}{5}x + y^2 - 4y + \frac{29}{25} = 0$

$$\left(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}\right) - \frac{4}{25} + \left(y^2 - 4y + 4\right) - 4 = -\frac{29}{25}$$
$$\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y - 2\right)^2 = 3$$
$$C\left(\frac{2}{5}, 2\right), r = \sqrt{3}$$

d) $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 4 = 0$

$$\left(x^2 + 6x + 9\right) - 9 + \left(y^2 - 10y + 25\right) - 25 = 4$$
$$\left(x + 3\right)^2 + \left(y - 5\right)^2 = 38$$
$$C\left(-3, 5\right), r = \sqrt{38}$$

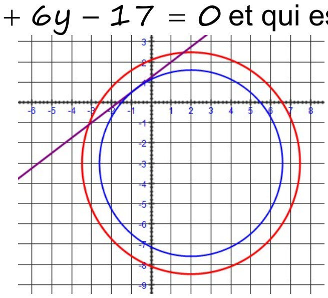
2. Quelle est l'équation du cercle ayant comme centre (2, -3) et qui est tangent à l'axe des x.

$$C\left(2, -3\right), r = 3$$
$$\left(x - 2\right)^2 + \left(y + 3\right)^2 = 9$$

3. Détermine l'équation du cercle qui est concentrique au cercle $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ et qui est tangent à 3x – 4y + 5 = 0.

$$\left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + \left(y^2 + 6x + 9\right) - 9 = 17$$
$$\left(x - 2\right)^2 + \left(y + 3\right)^2 = 30$$
$$C\left(2, -3\right), r = \sqrt{30}$$

$$3x - 4y + 5 = 0$$
$$-4y = -3x - 5$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$



$$m \perp = \frac{-4}{3} \quad et \quad \left(2, -3\right)$$
$$y = \frac{-4}{3}x + b$$
$$-3 = \frac{-4}{3}\left(2\right) + b$$
$$b = -3 + \frac{8}{3} = \frac{-1}{3}$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \quad et \quad y = \frac{-4}{3}x - \frac{1}{3}$$
$$9x + 15 = -16x - 4$$
$$25x = -19$$
$$x = \frac{-19}{25}$$

$$y = \frac{3}{4}\left(\frac{-19}{25}\right) + \frac{5}{4}$$
$$y = \frac{17}{25}$$
$$\left(\frac{-19}{25}, \frac{17}{25}\right)$$

$$\left(2, -3\right) \quad et \quad \left(\frac{-19}{25}, \frac{17}{25}\right)$$
$$d = \sqrt{\left(\frac{-19}{25} - 2\right)^2 + \left(\frac{17}{25} + 3\right)^2}$$
$$d = 4,6$$

$$\left(x - 2\right)^2 + \left(y + 3\right)^2 = 21,16$$

Feuillet p. 8

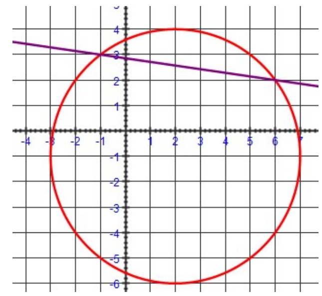
4. Détermine les points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ avec :

a) $x + 7y - 20 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$
$$(20-7y)^2 + y^2 - 4(20-7y) + 2y - 20 = 0$$
$$400 - 140y - 140y + 49y^2 + y^2 - 80 + 28y + 2y - 20 = 0$$

$x = 20 - 7y \rightarrow$

$$50y^2 - 250y + 300 = 0$$
$$y^2 - 5y + 6 = 0$$
$$(y-3)(y-2) = 0$$
$$y = 3 \quad \text{ou} \quad y = 2$$



si $y = 3$: $x = 20 - 7(3)$, $x = -1$, $(-1, 3)$

si $y = 2$: $x = 20 - 7(2)$, $x = 6$, $(6, 2)$

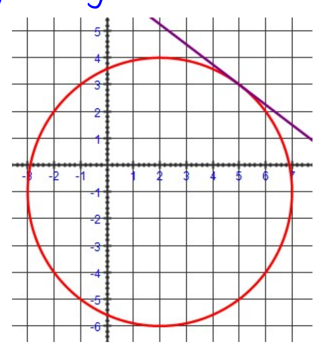
b) $3x + 4y - 27 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$
$$\left(9 - \frac{4}{3}y\right)^2 + y^2 - 4\left(9 - \frac{4}{3}y\right) + 2y - 20 = 0$$

$3x = 27 - 4y$

$x = 9 - \frac{4}{3}y \rightarrow$

$$81 - 12y - 12y + \frac{16}{9}y^2 + y^2 - 36 + \frac{16}{3}y + 2y - 20 = 0$$
$$729 - 108y - 108y + 16y^2 + 9y^2 - 324 + 48y + 18y - 180 = 0$$
$$25y^2 - 150y + 225 = 0$$
$$y^2 - 6y + 9 = 0$$
$$(y-3)(y-3) = 0$$
$$y = 3 \quad \text{ou} \quad y = 3$$



si $y = 3$

$$x = 9 - \frac{4}{3}(3)$$
$$x = 5$$
$$(5, 3)$$

Feuillet p. 8

c) x + y – 10 = 0

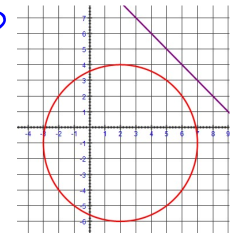
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$

$$(10-y)^2 + y^2 - 4(10-y) + 2y - 20 = 0$$

$$x = 10 - y \rightarrow \quad \rightarrow 100 - 10y - 10y + y^2 + y^2 - 40 + 4y + 2y - 20 = 0$$

$$2y^2 - 14y + 40 = 0$$

$$y^2 - 7y + 20 = 0$$

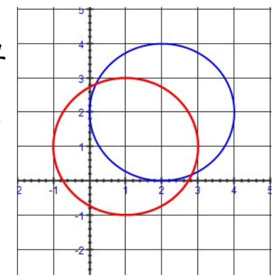


$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(1)(20)}}{2}$$

la droite ne coupe pas le cercle.

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{-31}}{2} = \varnothing$$

5. Quels sont les points d'intersection des deux cercles définis par $\begin{aligned}(x-2)^2 + (y-2)^2 &= 4\\ (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 4\end{aligned}$



$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

$$x^2 - 2x - 2x + 4 + y^2 - 2y - 2y + 4 = x^2 - x - x + 1 + y^2 - y - y + 1$$

$$-2x - 2y + 6 = 0$$

$$x = 3 - y$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(3-y-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(-y+1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$y^2 - 2y + 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0$$

$$2y^2 - 6y + 1 = 0$$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(2)(1)}}{4}$$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{4} = y = \frac{6 \pm 5{,}3}{4}$$

$$y = \frac{6 + 5{,}3}{4} = 2{,}8$$

$$y = \frac{6 - 5{,}3}{4} = 0{,}175$$

si $y = 2{,}8$

$x = 3 - 2{,}8 = 0{,}2$

$(0{,}2;2{,}8)$

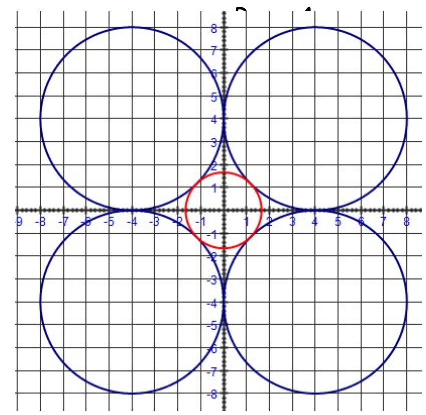
si $y = 0{,}175$

$x = 3 - 0{,}175 = 2{,}825$

$(2{,}825;0{,}175)$

6. Soit le cercle $x^2 + y^2 = 25$. Après une translation, son centre se trouve au point (-3, 4). Suppose que (m, n) est un point sur le cercle original. En fonction de m et n, quelles sont les coordonnées du point correspondant sur l'image par translation ? $(m-3, n+4)$

Feuillet p. 8



7. Dans chacun des quadrants d'un plan cartésien, on a tracé un cercle de rayon 4 qui touche aux deux axes, comme dans la figure. On a également tracé un petit cercle dont le centre est à l'origine et qui touche chacun des autres cercles. Quelle est l'équation du petit cercle ?

$$C(4,4) \quad et \quad r = 4$$
$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$$

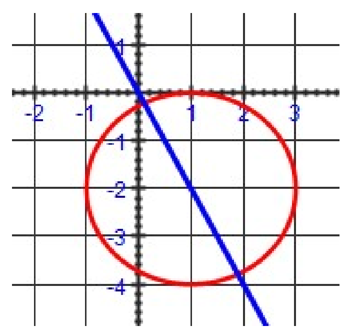
la droite $y = x$ passe où les cercles se coupent

$$(y-4)^2 + (y-4)^2 = 16$$
$$y^2 - 8y + 16 + y^2 - 8y + 16 - 16 = 0$$
$$2y^2 - 16y + 16 = 0$$
$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(8)}}{2}$$
$$y = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = y = \frac{8 \pm 5{,}66}{2}$$
$$y = \frac{8 + 5{,}66}{2} = 6{,}83$$
$$y = \frac{8 - 5{,}66}{2} = 1{,}17$$

$$y = x$$
$$(6{,}83;6{,}83)$$
$$(1{,}17;1{,}17)$$

$$(1{,}17;1{,}17)$$
$$r^2 = 1{,}17^2 + 1{,}17^2 = 2{,}74$$
$$x^2 + y^2 = 2{,}74$$

8. Les points (1, 0) et (-1, -2) se trouvent sur un cercle. Le centre de ce cercle se trouve sur la droite définie par l'équation y = -2x. Quelle est l'équation du cercle ?



$$C(h,-2h)\, et\, (-1,-2) = C(h,-2h)\, et\, (1,0)$$
$$(-1-h)^2 + (-2+2h)^2 = (1-h)^2 + (0+2h)^2$$
$$1 + 2h + h^2 + 4 - 8h + 4h^2 = 1 - 2h + h^2 + 4h^2$$
$$5h^2 - 5h^2 - 6h + 2h = 1 - 1 - 4$$
$$-4h = -4$$
$$h = 1$$

si $h = 1, k = -2 \quad C(1,-2)$ donc $r = 2$

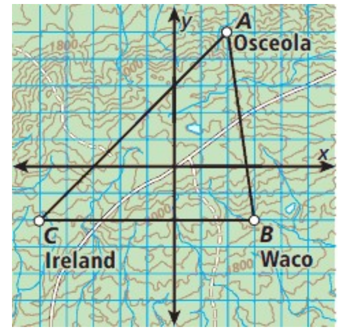
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

9. Thomas pilote sont avion radioguidé à 30 m au-dessus du sol. Il suit une trajectoire circulaire correspondant à l'équation $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 36$. Emiko fait voler son avion à la même hauteur. Elle suit une trajectoire circulaire représentée par l'équation $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$. Les trajectoires des deux avions vont--elles se croiser ? Si oui, en combien de points ?

$$C(5,2) \quad et \; C(-1,4)$$
$$d = \sqrt{(5+1)^2 + (2-4)^2} = 6{,}32$$

donc, oui, ils se croisent en deux points car la distance entre les deux centre est 11.

Feuillet p. 8



10. Des météorologistes planifient un endroit pour une nouvelle station météo pour couvrir Osceola, Waco et Ireland au Texas. Pour optimiser la couverture radar, la station doit être équidistant des trois villes qui sont situées aux points A(2, 5), B(3, -2) et C(-5, -2).

 a) Quelles sont les coordonnées où la station doit être construite ?

$$A(2,5)\,B(3,-2)$$
$$(2-h)^2+(5-k)^2=(3-h)^2+(-2-k)^2$$
$$4-4h+h^2+25-10k+k^2=9-6h+h^2+4+4k+k^2$$
$$-4h+6h-10k-4k=9+4-4-25$$
$$2h-14k=-16$$
$$B(3,-2)\,C(-5,-2)$$
$$(3-h)^2+(-2-k)^2=(-5-h)^2+(-2-k)^2$$
$$9-6h+h^2+4+4k+k^2=25+10h+h^2+4+4k+k^2$$
$$-6h-10h+4k-4k=25+4-9-4$$
$$-16h=16$$
$$h=-1$$
$$2h-14k=-16$$
$$2(-1)-14k=-16$$
$$-14k=-14$$
$$k=1$$
$$C(-1,1)$$

 b) Si chaque unité du plan représente 8,5 miles, quel est le diamètre de la région couverte par le radar ?

Centre $(-1,1)$, $A(2,5)$

rayon $=\sqrt{(2+1)^2+(5-1)^2}=5$

Diamètre = 5 x 8,5 x 2 miles = 85 miles.

Feuillet p. 8

11. Une tour pour une antenne radio est perpendiculaire au sol mais elle est attachée par trois fils de même longueur. Les fils touchent le sol à trois points sur un cercle dont le centre est à la base de la tour. Chaque fil touche le sol au point A(2, 6), B(-2. -2) et C(-5, 7).

a) Quelles sont les coordonnées à la base de la tour ?

$$A(2,6)\,B(-2,-2)$$
$$(2-h)^2+(6-k)^2=(-2-h)^2+(-2-k)^2$$
$$4-4h+h^2+36-12k+k^2=4+4h+h^2+4+4k+k^2$$
$$-4h-4h-12k-4k=4+4-4-36$$
$$-8h-16k=-32$$
$$h+2k=4$$
$$B(-2,-2)\,C(-5,7)$$
$$(-2-h)^2+(-2-k)^2=(-5-h)^2+(7-k)^2$$
$$4+4h+h^2+4+4k+k^2=25+10h+h^2+49-14k+k^2$$
$$4h-10h+4k+14k=25+49-4-4$$
$$-6h+18k=66$$
$$h-3k=-11$$

$$\boxed{1}\quad h+2k=4$$
$$\boxed{2}\quad h-3k=-11$$
$$\rightarrow \boxed{1}-\boxed{2}\quad 5k=15,\quad k=3$$
$$\rightarrow h+2(3)=4,\quad h=-2 \rightarrow \text{Tour}(-2,3)$$

b) Si chaque unité représente un pied, quel est le diamètre du cercle ?

Centre$(-2,3)$, $A(2,6)$

$$d=\sqrt{(2+2)^2+(6-3)^2}=5$$

Diamètre = 2 x 5 = 10.pieds

Feuillet p. 8

12. En Afrique, le long de la rivière Gambia, on retrouve des groupes de roches placées en cercle qui date de plus de 1000 ans. Dans un de ces cercles, situé à Ker Batch, trois des roches sont placées aux coordonnées A(3, 1), B(4, -2) et C(-6, -2).

a) Quelles sont les coordonnées d centre de ce cercle ?.

$$A(3,1)\,B(4,-2)$$
$$(3-h)^2+(1-k)^2=(4-h)^2+(-2-k)^2$$
$$9-6h+h^2+1-2k+k^2=16-8h+h^2+4+4k+k^2$$
$$-6h+8h-2k-4k=16+4-9-1$$
$$2h-6k=10$$
$$h-3k=5$$
$$B(4,-2)\,C(-6,-2)$$
$$(4-h)^2+(-2-k)^2=(-6-h)^2+(-2-k)^2$$
$$16-8h+h^2+4+4k+k^2=36+12h+h^2+4+4k+k^2$$
$$-8h-12h+4k-4k=36+4-16-4$$
$$-20h=20$$
$$h=-1$$

$$h-3k=5$$
$$-1-3k=5$$
$$-3k=6$$
$$k=-2$$
$$\text{Centre}(-1,-2)$$

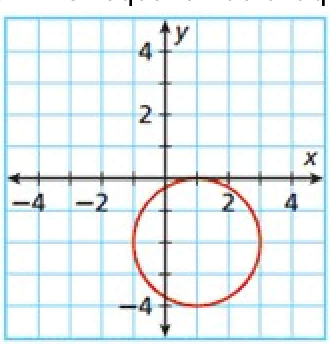
b) Si chaque unité représente 1 pied, quel est le diamètre de cercle de roches ?

$$\text{Centre}(-1,-2)\,A(2,6)$$
$$\text{rayon}=\sqrt{(2+1)^2+(6+2)^2}=8{,}54$$

diamètre = 2 x 8,54 pieds = 17,1 pieds.

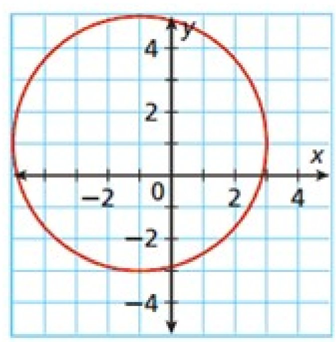
13. Détermine l'équation de chaque cercle.

a)



$$C(1,-2);r=2$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2=4$$

b)

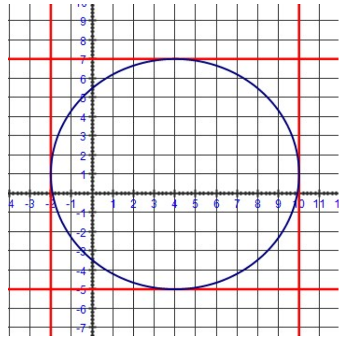


$$C(-1,1);r=4$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2=16$$

Feuillet p. 8

14. Les lignes x = -2, y = -5 et y = 7 sont tangentes à un cercle. Trouve l'équation du cercle.

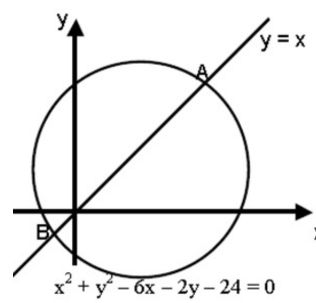
$$k = \left(-5 + \frac{1}{2}\left(7 - (-5)\right)\right) = 1$$
$$h = \left(-2 + \frac{1}{2}(12)\right) = 4$$
$$\text{Centre}(4, 1), \text{rayon} = 6$$
$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 36$$



15. Le cercle montre le centre (24, 7) et passes par l'origine. Quelle est l'équation du cercle ?

$$\text{Centre}(24, 7)\ O(0, 0)$$
$$\text{rayon} = \sqrt{(24-0)^2 + (7-0)^2} = 25$$
$$(x-24)^2 + (y-7)^2 = 625$$

16. La ligne y = x coupe le cercle $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 24 = 0$ aux points A et B.



a) Détermine les coordonnées de A et B.

$$x^2 + x^2 - 6x - 2x - 24 = 0$$
$$2x^2 - 8x - 24 = 0$$
$$x^2 - 4x - 12 = 0$$
$$(x-6)(x-2) = 0$$
$$x = 6 \text{ ou } x = 2$$

$$(6, 6) \quad \text{et} \quad (2, 2)$$

b) Détermine l'équation du cercle dont AB est son diamètre.

$$\text{Centre}\left(6 + \frac{1}{2}(2-6), 6 + \frac{1}{2}(2-6)\right)$$
$$(4, 4)$$
$$\text{rayon} = \frac{\sqrt{(6-2)^2 + (6-2)^2}}{2} = 2{,}83$$
$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 8$$

Feuillet p. 8

17. Démontre que la ligne y = -3x – 10 est tangente au cercle $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0$ et détermine le point de contact.

$$x^2 + (-3x-10)^2 - 8x + 4(-3x-10) - 20 = 0$$
$$x^2 + 9x^2 + 60x + 100 - 8x - 12x - 40 - 20 = 0$$
$$10x^2 + 40x + 40 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$(x+2)(x+2) = 0$$
$$x = -2$$

$$y = -3(-2) - 10 = -4$$
$$(-2,-4)$$

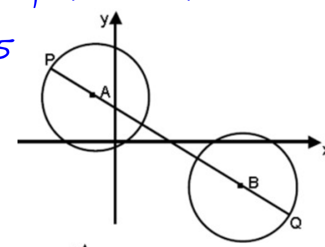
18. Dans cette figure, le cercle, de centre A a comme équation $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Le cercle de centre B a comme équation $x^2 + y^2 - 22x + 10y + 121 = 0$. La ligne PQ passe par AB. Calcule la longueur de PQ.

Cercle de centre A

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 8y + 16) - 16 = 8$$
$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$$
$$\text{Centre}(-1,4); r = 5$$

Cercle de centre B

$$(x^2 - 22x + 121) - 121 + (y^2 + 10y + 25) - 25 = -121$$
$$(x-11)^2 + (y+5)^2 = 25$$
$$\text{Centre}(11,-5); r = 5$$



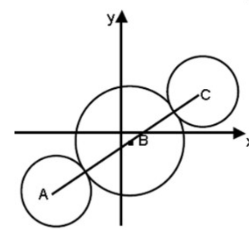
$$A(-1,4); B(11,-5)$$
$$d = \sqrt{(11+1)^2 + (-5-4)^2} = 15$$

$$PQ = 15 + 5 + 5 = 25$$

19. Dans la figure, les centres A, B et C sont colinéaires. Les équations des cercles externes sont

$$(x+12)^2 + (y+15)^2 = 25 \quad et \quad (x-24)^2 + (y-12)^2 = 100.$$

Détermine l'équation du cercle central.



cercleA cercleC

$$C(-12,-15); r = 5 \quad C(24,12); r = 10$$

cercleB

$$d = \sqrt{(24+12)^2 + (12+15)^2} = 45$$
$$\text{diamètre} = 45 - 5 - 10 = 30$$

point d'intersection du cercle A et B

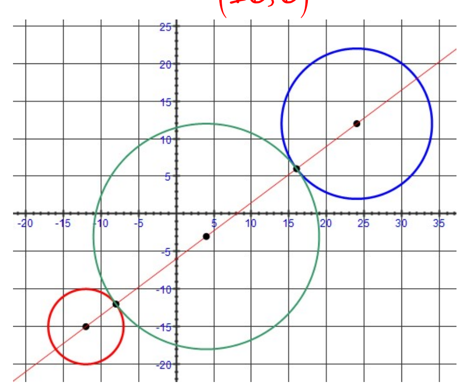
$$\left(-12 + \frac{5}{45}(24+12), -15 + \frac{5}{45}(12+15)\right)$$
$$(-8,-12)$$

point d'intersection du cercle B et C

$$\left(24 + \frac{10}{45}(-12-24), 12 + \frac{10}{45}(-15-12)\right)$$
$$(16,6)$$

Centre de C

$$\left(-8 + \frac{1}{2}(16+8), -12 + \frac{1}{2}(6+12)\right)$$
$$(4,-3); r = 15$$
$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 225$$



Feuillet p. 8

20. En 2004, le plus gros carrousel au monde était à « House on the Rock », à Spring Green, Wisconsin. Suppose que le centre du carrousel est à l'origine et que un des animaux sur la circonférence est à (24, 32). Le carrousel suit un patron circulaire, quel est l'équation de ce cercle ?

$$r = \sqrt{(24-0)^2 + (32-0)^2} = 40$$
$$x^2 + y^2 = 1600$$

21. Un séismographe mesure le tremblement de la terre lors d'un séisme. Pour trouver le centre du séisme, les scientistes prennent la lecture à trois endroits différents. Ils tracent un cercle autour de chaque point, le rayon des cercles est la distance que le séisme est du séismographe de cet endroit. L'intersection des trois cercles est le centre. Trouve le centre du séisme de New Madrid.

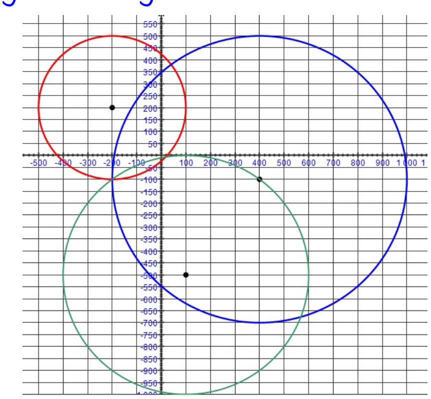
Séismographe	Endroit	Distance du séisme
A	(-200, 200)	300 miles
B	(400, -100)	600 miles
C	(100, -500)	500 miles

Cercle A = Cercle B

$$(x+200)^2 + (y-200)^2 - 300^2 = (x-400)^2 + (y+100)^2 - 600^2$$
$$x^2 + 400x + 200^2 + y^2 - 400y + 200^2 - 300^2 = x^2 - 800x + 400^2 + y^2 + 200y + 100^2 - 600^2$$
$$1200x - 600y = -180000$$
$$2x - y = -300$$

Cercle C = Cercle B

$$(x-100)^2 + (y+500)^2 - 500^2 = (x-400)^2 + (y+100)^2 - 600^2$$
$$x^2 - 200x + 100^2 + y^2 + 1000y + 500^2 - 500^2 = x^2 - 800x + 400^2 + y^2 + 200y + 100^2 - 600^2$$
$$600x + 800y = -200000$$
$$6x + 8y = -2000$$



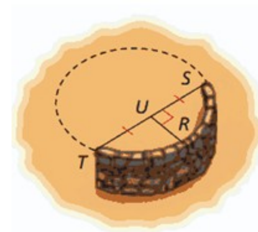
$$y = 2x + 300 \rightarrow \quad 6x + 8(2x+300) = -2000$$
$$6x + 16x + 2400 = -2000$$
$$22x = -4400$$
$$x = -200$$

$$y = 2(-200) + 300$$
$$y = -100$$

Le séisme était au point (-200, -100).

Feuillet p. 8

22. Un archéologue trouve un morceau d'un mur circulaire d'un mur de pierre comme l'arc ST dans la figure, ST = 12,2 m et UR = 3,9 m. Quel est le diamètre du mur circulaire original ?



$$r^2 = (r - 3,9)^2 + 6,1^2$$
$$r^2 = r^2 - 3,9r - 3,9r + 15,21 + 37,21$$
$$-52,42 = -7,8r$$
$$r = 6,72$$
$$\text{diamètre} = 13,44 \text{ mètres}$$

23. Détermine l'équation du cercle, sous sa forme générale,

a) De centre A(-2, -3) et de rayon 3.

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$$

b) Qui passe par (1, 1) et a comme centre (4, 5).

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = r^2$$
$$(1-4)^2 + (1-5)^2 = r^2$$
$$9 + 16 = r^2$$
$$25 = r^2$$
$$r = 5$$
$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$$

c) Une station de télévision dessert les résidents de trois villes situées à J(5, 2), K(-7, 2) et L(-5, -8). La station veut construire une nouvelle installation de radiodiffusion qui sera équidistante des trois villes. Quelles sont les coordonnées de l'endroit où les installations devraient être construites ?

$$J(5,2)\,K(-7,2)$$
$$(5-h)^2 + (2-k)^2 = (-7-h)^2 + (2-k)^2$$
$$25 - 10h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = 49 + 14h + h^2 + 4 - 4k + k^2$$
$$-24h = 24$$
$$h = -1$$
$$K(-7,2)\,L(-5,-8)$$
$$(-7-h)^2 + (2-k)^2 = (-5-h)^2 + (-8-k)^2$$
$$49 + 14h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = 25 + 10h + h^2 + 64 + 16k + k^2$$
$$4h - 20k = 36$$
$$4(-1) - 20k = 36$$
$$-20k = 40$$
$$k = -2$$

Les installations devraient être construites au point (-1, -2).