***Exercices 6.5 p.309 #1, 3, 5, 7, 16, 18, 20, 22a, 23, 24, 27, 28

Trouve la somme partielle indiquée de chaque série géométrique.

1. $10 + 15 + 22{,}5 + \ldots$ Trouve la valeur de S_8

$a = 10$

$r = \frac{3}{2}$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_8 = \frac{10\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$S_8 = \frac{10\left(1 - \frac{6561}{256}\right)}{\frac{-1}{2}}$$

$$S_8 = 10\left(\frac{256 - 6561}{256}\right) \times \frac{-2}{1}$$

$$S_8 = -20\left(\frac{-6305}{256}\right) = \frac{31525}{64}$$

3. $66 + 22 + \frac{22}{3} + \ldots$ Trouve la valeur de S_5

$a = 66$

$r = \frac{1}{3}$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_5 = \frac{66\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_5 = \frac{66\left(1 - \frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}}$$

$$S_5 = 66\left(\frac{243 - 1}{243}\right) \times \frac{3}{2}$$

$$S_5 = 66\left(\frac{242}{243}\right) = \frac{2662}{27}$$

5. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \ldots$ Trouve la valeur de S_9

$a = \frac{1}{3}$

$r = 2$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_9 = \frac{\frac{1}{3}\left(1 - (2)^9\right)}{1 - 2}$$

$$S_9 = \frac{\frac{1}{3}(1 - 512)}{-1}$$

$$S_9 = \frac{1}{3}(-511) \times -1$$

$$S_9 = \frac{511}{3}$$

7. $\frac{1}{13} - \frac{2}{13} + \frac{4}{13} - \ldots$ Trouve la valeur de S_9

$a = \frac{1}{13}$

$r = -2$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_9 = \frac{\frac{1}{13}\left(1 - (-2)^9\right)}{1 - (-2)}$$

$$S_9 = \frac{\frac{1}{13}(1 + 512)}{3}$$

$$S_9 = \frac{1}{13}(513) \times \frac{1}{3}$$

$$S_9 = \frac{513}{39} = \frac{171}{13}$$

***Exercices 6.5 p.309 #1, 3, 5, 7, 16, 18, 20, 22a, 23, 24, 27, 28

~~Écris chaque série à l'aide de la notation sigma.~~

Détermine la somme de chacune.

16. $12+3+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{3}{64}$

$t_n = ar^{n-1}$

$\frac{3}{64} = 12\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{3}{64} \div 12 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a = 12$

$r = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$4 = n-1$

$n = 5$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$S_5 = \frac{12\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{4}}$

$S_5 = \frac{1023}{64}$

18. $-12-6-3-\ldots-\frac{3}{16}$

$t_n = ar^{n-1}$

$\frac{-3}{16} = -12\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{-3}{16} \div -12 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a = -12$

$r = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$6 = n-1$

$n = 7$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$S_7 = \frac{-12\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{-381}{16}$

***Exercices 6.5 p.309 #1, 3, 5, 7, 16, 18, 20, 22a, 23, 24, 27, 28

20. $100+25+\frac{25}{4}...+\frac{25}{256}$

$t_n = ar^{n-1}$

$a = 100$

$r = 1/4$

$\frac{25}{256} = 100\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$5 = n-1$

$n = 6$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$S_6 = \frac{100\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{34125}{256}$

22. Échecs. Selon une légende ancienne, le roi indien Shirham décida un jour de récompenser l'inventeur du jeu d'échecs, Sissa Dahir. Sissa demanda au roi un grain de blé pour la première case de l'échiquier deux grains pour la deuxième case, quatre grains pour la troisième, huit grains pour la quatrième et ainsi de suite pour les 64 cases. « C'est tout ce que tu veux? » demanda naïvement le roi.

a) Combien de grains de blé Sissa demanda-t-il?

$a = 1$

$r = 2$

$n = 64$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$S_{64} = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 1,84467x10^{19}$

Il en demanda $1,84467 \times 10^{19}$.

23. Tournoi d'échecs. Soixante-quatre personnes participent à un tournoi d'échecs. Lorsqu'une personne perd une partie, elle est éliminée. Seuls les gagnants participent au tour suivant. Combien de parties doivent avoir lieu avant qu'on connaisse la gagnante ou le gagnant du tournoi?

$a = 32$

$r = 1/2$

$32+16+8+4+2+1 = 63$

Il faudrait 63 parties avant de connaître la ou le gagnant.e

24. Écologie. Selon de récentes estimations basées sur des données recueillies par satellite, il reste 775 millions d'hectares de forêt tropicales humide sur la planète. Le taux annuel moyen de déforestation dans le monde s'élève à 0,77%. Combien de millions d'hectares de forêts tropicales humides seront déboisés au cours des dix prochaines années?

$a = 775 \times 0,9923 = 769,0325$

$r = 1-0,77\% = 99,23\%$

$t_n = ar^{n-1}$

$t_{10} = 769,0325(0,9923)^9$

$t_{10} = 717,35$ ce qu'il reste

$775 - 717,35 = 57,65$

Il y a donc 57,65 millions d'hectares de déboisés.

***Exercices 6.5 p.309 #1, 3, 5, 7, 16, 18, 20, 22a, 23, 24, 27, 28

27. Épargne retraite. Rita veut planifier sa retraite. Elle décide de placer 1000$ par année de l'âge de 20 ans jusqu'à l'âge de 30 ans. Cynthia, elle, investit 1000$ par année de l'âge de 30 ans jusqu'à l'âge de 65 ans. Si on suppose que le taux d'intérêt annuel est de 8%, composé annuellement, qui aura le montant le plus élevé à l'âge de 65 ans?

Rita
dépôt1 – 1080 + 1166,40...
dépôt2 – 1080 + 1166,40...
dépôt3 – 1080 + 1166,40...

$a = 1000 \times 1{,}08 = 1080$
$r = 1{,}08$

$$S_{10} = \frac{1080\left(1 - 1{,}08^{10}\right)}{1 - 1{,}08} = 15645{,}49 \text{ somme des 10ière années}$$

Ensuite pour les 34 prochaines années.

$$\text{Somme finale} = 15645{,}49(1{,}08)^{34} = 214188{,}81\$$$

Cynthia
dépôt1 – 1080 + 1166,40...
dépôt2 – 1080 + 1166,40...
dépôt3 – 1080 + 1166,40...

$a = 1000 \times 1{,}08 = 1080$
$r = 1{,}08$

$$S_{35} = \frac{1080\left(1 - 1{,}08^{35}\right)}{1 - 1{,}08} = 186102{,}15$$

donc, Rita a le plus d'argent.

28. Conception automobile. Les amortisseurs d'une voiture servent à réduire les vibrations qui se produisent lorsque la voiture roule sur une bosse. Si un amortisseur réduit de 70% la vibration du châssis de la voiture chaque fois que celle-ci passe l'axe d'équilibre de l'amortisseur, quelle est la distance parcourue par le piston de l'amortisseur en 3 bonds après que la voiture a passé sur le nid-de-poule de 20 cm de profond?

$a = 20$
$r = 1 - 30\% = 70\%$

$$S_6 = \frac{20\left(1 - 0{,}7^{3}\right)}{1 - 0{,}7} = 43{,}8 \qquad 43{,}8 \times 2 = 87{,}6$$

Le piston parcourt une distance de 87,6 cm