Math 30331 - C

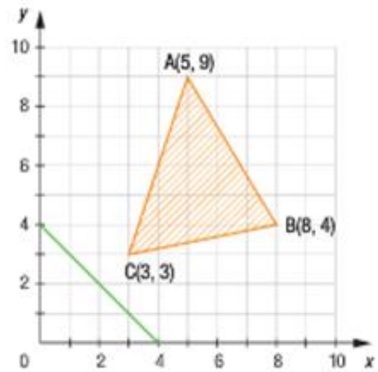
Bloc 1 – Régularité et algèbre

***Mise au point p. 306 # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12

1 Dans chacun des graphiques ci-dessous, on a représenté un polygone de contraintes ainsi qu'une droite baladeuse. Dans chaque cas, déterminez le ou les points dont les coordonnées engendrent :

1) la valeur minimale de la fonction à optimiser ;
2) la valeur maximale de la fonction à optimiser.

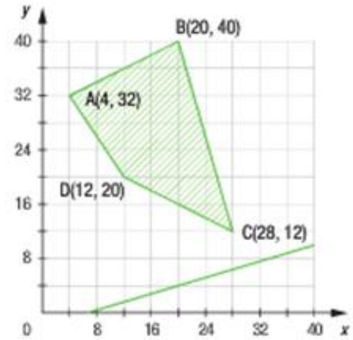
a) Fonction à optimiser : $z = x + y$



$x + y$

A(5, 9)	14
B(8, 4)	12
C(3, 3)	6
Min	C
Max	A

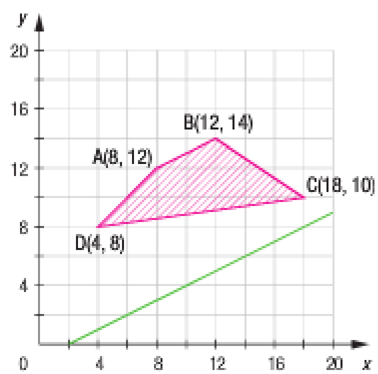
b) Fonction à optimiser : $z = 3x - 10y$



$3x - 10y$

A(4, 32)	-308
B(20, 40)	-340
C(28, 12)	-36
D(12, 20)	-164
Min	B
Max	C

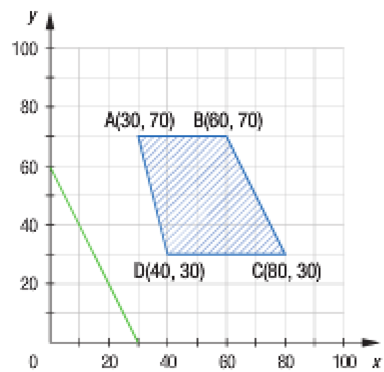
c) Fonction à optimiser : $z = x - 2y$



$x - 2y$

A(8, 12)	-16
B(12, 14)	-16
C(18, 10)	-2
D(4, 8)	-12
Min	AB
Max	C

d) Fonction à optimiser : $z = 2x + y$



$2x + y$

A(30, 70)	130
B(60, 70)	190
C(80, 30)	190
D(40, 30)	110
Min	D
Max	BC

2 Les sommets d'un polygone de contraintes sont A(11, 13), B(41, 61), C(63, 55) et D(51, 16). Déterminez le sommet dont les coordonnées engendrent :

a) le maximum de la fonction à optimiser dont la règle est $z = x + 4y$;

b) le minimum de la fonction à optimiser dont la règle est $z = 2{,}4x - 6y$.

	A(11, 13)	B(41, 61)	C(63, 55)	D(51, 16)
a) $z = x + 4y$	63	285	283	115
b) $z = 2{,}4x - 6y$	-51,6	-267,60	-178,8	26,4

***Mise au point p. 306 # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12

3 Voici un polygone de contraintes et les règles de deux fonctions à optimiser.

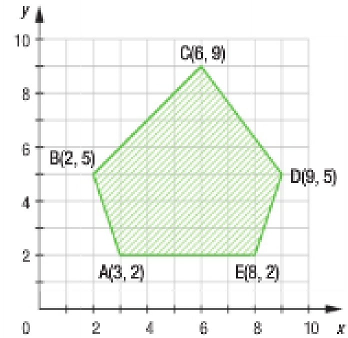
① $f(x, y) = 2x + 3y$
Objectif : maximiser

② $g(x, y) = 5x - 4y$
Objectif : minimiser

Dans chaque cas :

a) déterminez le ou les points dont les coordonnées engendrent la valeur optimale de la fonction ;

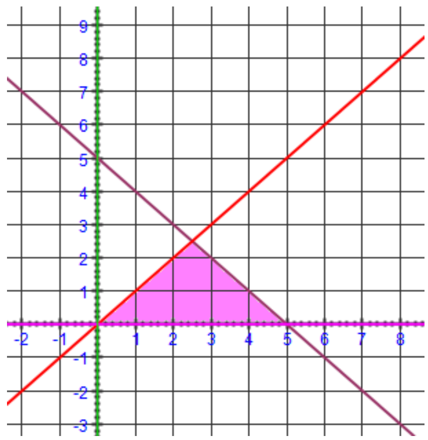
b) déterminez cette valeur optimale.



	A(3, 2)	B(2, 5)	C(6, 9)	D(9, 5)	E(8, 2)
2x+3y	12	19	39	33	22
5x−4y	7	−10	−6	25	32

6 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées du ou des points qui permettent d'atteindre l'objectif indiqué.

a) Fonction à optimiser : $z = 2x + 3y$
Objectif : maximiser
Contraintes : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \leq 5$
$y \leq x$



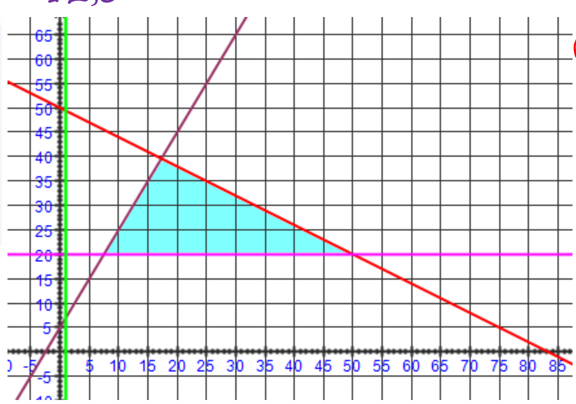
(0, 0), (5, 0)

$x + y = 5$ et $y = x$
$y + y = 5$
$2y = 5$
$y = 2,5 \rightarrow x = 2,5$
(2,5; 2,5)

	(0,0)	(5,0)	(2,5; 2,5)
2x + 3y	0	10	12,5

b) Fonction à optimiser : $z = 10x - 4y$
Objectif : minimiser
Contraintes : $x \geq 1$
$y \geq 20$
$y \leq 2x + 5$
$y \leq -0,6x + 50$

$y = -0,6x + 50$
$y = 2x + 5$
$-0,6x + 50 = 2x + 5$
$-2,6x = -45$
$x = 17,3$
$y = 2(17,3) + 5 = 39,6$
(17,3; 39,6)



(50, 20)

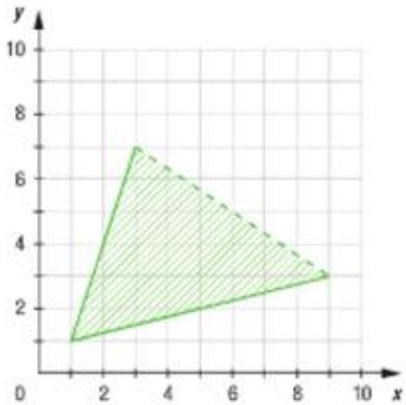
$y = 2x + 5$
$20 = 2x + 5$
$15 = 2x$
$x = 7,5$
(7,5; 20)

	(50, 20)	(7,5; 20)	(17,3; 39,6)
10x − 4y	420	−5	14,6

***Mise au point p. 306 # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12

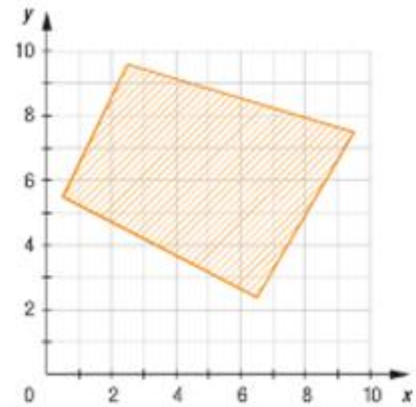
7 Chacun des polygones de contraintes ci-dessous est associé à une situation dans laquelle il ne faut tenir compte que des points dont les coordonnées sont entières. Dans chaque cas, déterminez les coordonnées du ou des points qui minimisent la fonction à optimiser.

a) **Fonction à optimiser :** $z = 3x - 2{,}5y$



	$3x - 2{,}5y$
(1, 1)	0,5
(8, 3)	16,5
(3, 6)	−6

b) **Fonction à optimiser :** $z = 2x + 3y$



	$2x + 3y$
(2, 5)	19
(1, 6)	20
(3, 9)	33
(9, 7)	39
(6, 3)	21
(7, 4)	26

8 Une acéricultrice recueille annuellement de 28 000 L à 40 000 L d'eau d'érable. Il lui faut 35 L de cette eau pour produire 1 L de sirop et 40 L d'eau d'érable pour produire 1 kg de tire. Quotidiennement, elle peut produire un maximum de 60 L de sirop, si elle ne fait que du sirop, et un maximum de 45 kg de tire, si elle ne fait que de la tire. L'acéricultrice peut consacrer au plus 15 jours complets à cette production. La vente de sirop lui rapporte un profit de 3 $/L et la vente de tire, 8 $/kg.

a) Définissez chacune des variables.

x : nombre de litres de sirop

y : nombre de kg de tire

b) Établissez la règle de la fonction à optimiser.

$z = 3x + 8y$

c) Traduisez les contraintes par un système d'inéquations.

$x \geq 0$

$y \geq 0$

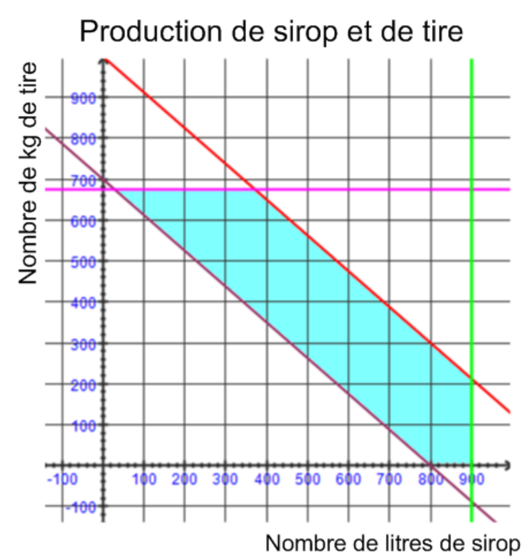
$35x + 40y \geq 28000$

$35x + 40y \leq 40000$

$x \leq 60 \times 15 \rightarrow x \leq 900$

$y \leq 45 \times 15 \rightarrow y \leq 675$

d) Représentez le polygone de contraintes.



***Mise au point p. 306 # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12

e) Quelle quantité de sirop et quelle quantité de tire cette acéricultrice doit-elle produire pour maximiser son profit ?

(800, 0), (900, 0)

$35x + 40y = 28000$ et $y = 675$
$35x + 40(675) = 28000$
$35x = 1000$
$x = 28,6$
$(28,6;675)$

$35x + 40y = 40000$ et $y = 675$
$35x + 40(675) = 40000$
$35x = 13000$
$x = 371,4$
$(371,4;675)$

$35x + 40y = 40000$ et $x = 900$
$35(900) + 40y = 40000$
$40y = 8500$
$y = 212,5$
$(900,\ 212,5)$

	(800, 0)	(900, 0)	(28,6; 675)	(371,4; 675)	(900; 212,5)
3x + 8y	2400	2700	5485,8	6514,2	4400

f) Quel profit peut-elle escompter ? 6514,20$

10 Le régiment d'une armée procède à un exercice au cours duquel il faut déplacer le plus grand nombre de soldats possible ainsi qu'un minimum de 1240 kg d'équipement sur une distance de 750 km. Pour cet exercice, seulement 660 L de diesel sont disponibles. Certaines caractéristiques des deux types de véhicules utilisés par ce régiment sont données dans le tableau suivant.

Caractéristiques de deux types de véhicules militaires

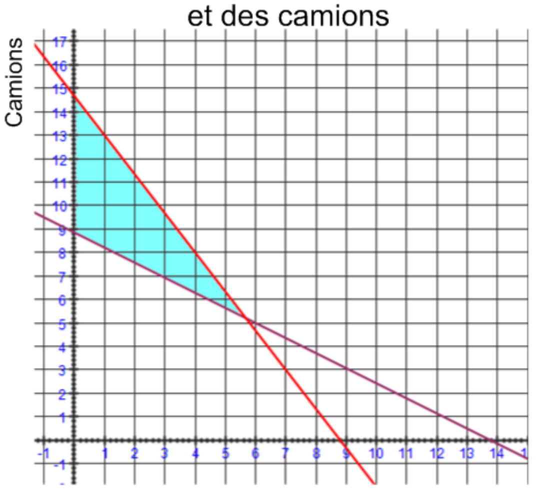
Type de véhicule	Blindé	Camion
Nombre de passagers	20	12
Chargement d'équipement (kg)	90	140
Consommation (L/100 km)	10	6

x : nombre de blindés
y : nombre de camion

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$90x + 140y \leq 1240$
$\left(10 \times \frac{750}{100}\right)x + \left(6 \times \frac{750}{100}\right)y \leq 660$
$75x + 45y \leq 660$

a) Représentez le polygone de contraintes.

Répartition des véhicules blindés et des camions



b) Déterminez la règle de la fonction à optimiser.

$z = 20x + 12y$

c) Expliquez pourquoi, dans ce contexte, il faut tenir compte uniquement des couples solutions formés de nombres entiers.

On parle de voitures

d) Combien y a-t-il de couples-solution qui permettent à ce régiment d'atteindre son objectif.

Vérifier tous les couples de l'ensemble solution dans Z=20x + 12y et les couples (1, 13) et (4, 8) donne la valeur maximale.

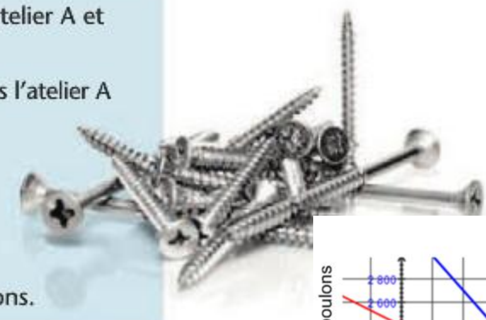
e) Quel est le nombre maximal de soldat que peut déplacer ce régiment? 176 soldats.

Quelle répartition de véhicules permet non seulement de transporter le plus de soldats possible, mais, également le plus d'équipement possibles. Le couple (1, 13)

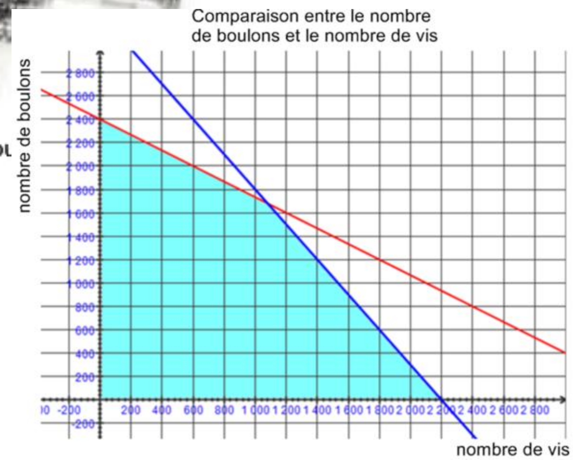
***Mise au point p. 306 # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12

12 Une entreprise fabrique des vis et des boulons dans deux ateliers A et B. Voici des renseignements à ce sujet.

- Le temps d'usinage d'une vis est de 3 min dans l'atelier A et de 6 min dans l'atelier B.
- Le temps d'usinage d'un boulon est de 4,5 min dans l'atelier A et de 4 min dans l'atelier B.
- L'atelier A est disponible 180 h/mois.
- L'atelier B est disponible 220 h/mois.
- Chaque atelier fabrique le même nombre de vis.
- Chaque atelier fabrique le même nombre de boulons.



Le profit engendré est de 0,20 $/vis et de 0,15 $/boulon. Combien de vis et de bou cette entreprise doit-elle produire chaque mois afin de maximiser ses profits ?



x : nombre de vis fabriquées dans chaque atelier
y : nombre de boulons fabriqués dans chaque atelier

Système d'inéquations : $x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + 4{,}5y \leq 10\,800$
$6x + 4y \leq 13\,200$

Fonction à optimiser : $P = 2(0{,}2x + 0{,}15y)$, où P représente les profits (en $).

Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 0), (0, 2400), (1080, 1680), (2200, 0)

Cette entreprise doit produire 2160 vis et 3360 boulons pour réaliser un profit maximal de 936 $.

13 **SUPERORDINATEUR** La vitesse de calcul d'un superordinateur se mesure en flops. Par exemple, un superordinateur qui gère 5 téraflops peut effectuer 5 milliers de milliards d'opérations par seconde. Un département de recherche veut se procurer un ensemble de superordinateurs. Voici les caractéristiques de deux modèles :

Caractéristiques de deux modèles de superordinateurs

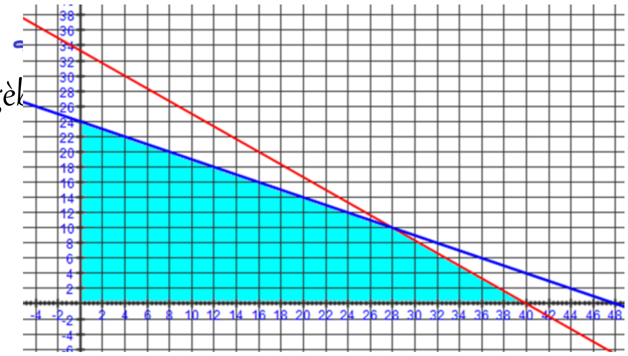
Modèle	A	B
Coût (M$)	20	24
Vitesse de calcul (téraflops)	40	60
Superficie du plancher requise (m^2)	5	10

La superficie disponible pour l'entreposage de ces ordinateurs est de 240 m^2. Combien d'ordinateurs de chaque modèle ce département devrait-il se procurer si l'objectif visé est de :

a) maximiser la vitesse de calcul tout en respectant un budget maximal de 800 M$?

b) minimiser les dépenses tout en obtenant une vitesse de calcul minimale de 480 téraflops ?

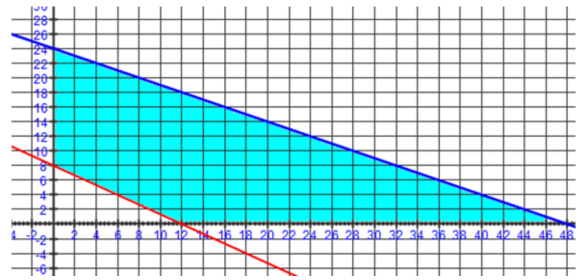
***Mise au point p. 306 # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12



a) x : nombre de superordinateurs du modèle A
y : nombre de superordinateurs du modèle B
Système d'inéquations : $x \geq 0, y \geq 0$

$$20x + 24y \leq 800$$
$$5x + 10y \leq 240$$

Fonction à optimiser : $V = 40x + 60y$, où V est la vitesse de calcul.
Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 0), (0, 24), (28, 10), (40, 0)
Ce département de recherche devrait se procurer 28 ordinateurs du modèle A et 10 ordinateurs du modèle B afin de maximiser la vitesse de calcul, soit 1720 téraflops.



b) Système d'inéquations : $x \geq 0, y \geq 0$

$$40x + 60y \geq 480$$
$$5x + 10y \leq 240$$

Fonction à optimiser : $D = 20x + 24y$, où D représente les dépenses.
Coordonnées des sommets du polygone de contraintes : (0, 8), (0, 24), (48, 0), (12, 0)
Ce département devrait se procurer aucun ordinateur du modèle A et 8 ordinateurs du modèle B afin de minimiser ses dépenses, soit 192 M$.

14 Afin de soigner un patient, un médecin décide de lui administrer un traitement qui combine deux médicaments A et B. Les effets secondaires de ces médicaments obligent ce médecin à respecter les contraintes suivantes.

- La dose x du médicament A doit être d'au moins 5 mg sans excéder 15 mg.
- La dose y du médicament B doit être d'au moins 8 mg sans excéder 25 mg.
- La dose totale des médicaments ne peut pas excéder 35 mg.
- La dose du médicament A doit représenter au plus 40 % de la dose totale des médicaments.

Les effets désirés de ce traitement sont quantifiables par un indice d'efficacité z compris entre 0 et 1, qui se calcule à l'aide de la fonction $z = 0{,}0305x + 0{,}025y$.

***Mise au point p. 306 # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12

$x \geq 5$

$y \geq 8$

$x \leq 15$

$y \leq 25$

$x + y \leq 35$

$x \leq 0,4(x + y)$

Sommets

(5, 8), (5, 25),

(10, 25), (14, 21),

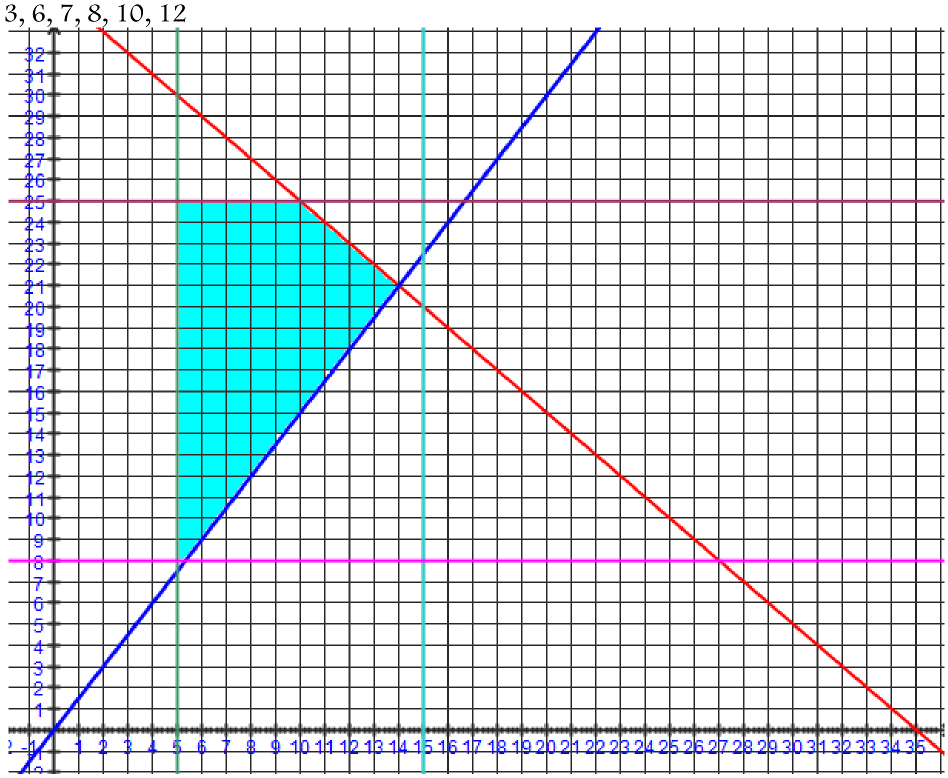
si $y = 8$

$x = 0,4x + 0,4y$

$0,6x = 0,4(8)$

$x = 5,33$

$(5,33;8)$



a) 1) Déterminez la dose de chaque médicament à prendre pour que l'indice d'efficacité soit le plus élevé possible.

2) Calculez la valeur de l'indice d'efficacité dans ce cas.

	(5, 8)	(5, 25)	(10, 25)	(14, 21)	(5,33; 8)
0,0305x + 0,025y	0,3525	0,7775	0,93	0,952	0,3625

14 mg du médicament A et 21 mg du médicament B. 2) 0,952

b) Si le médicament A ne peut être administré que sous la forme de comprimés de 2,5 mg et que le médicament B ne peut se prendre que sous la forme de comprimés de 5 mg :

1) déterminez le nombre de comprimés de chaque médicament à prendre pour que l'indice d'efficacité soit le plus élevé possible;

2) calculez la valeur de l'indice d'efficacité dans ce cas.

$2,5x \geq 5$

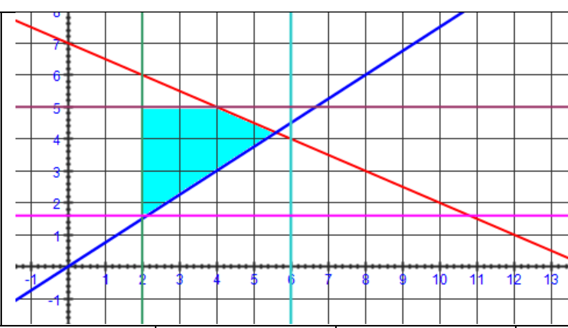
$5y \geq 8$

$2,5x \leq 15$

$5y \leq 25$

$2,5x + 5y \leq 35$

$2,5x \leq 0,4(2,5x + 5y)$



	(2, 2)	(3, 3)	(2, 5)	(4, 5)	(5, 4)
0,0305*(2,5)x + 0,025*(5)y	0,4	0,6	0,7775	0,93	0,88125

b) 1) 5 comprimés du médicament A et 4 comprimés du médicament B. **2)** 0,881 25 ????