

***Pages 373 à 377 : 5acf, 7ace, 10, 12, 14, 15, 17, 21, 22

5 Résolvez les équations suivantes.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 28$

$$\log_{\frac{1}{2}} 28 = x + 2$$

$$-4,807 = x + 2$$

$$x = -6,807$$

c) $13^{\frac{2-x}{4}} = \frac{3}{8}$

$$\log_{13} \frac{3}{8} = \frac{2-x}{4}$$

$$-0,3824 = \frac{2-x}{4}$$

$$2-x = -1,5296$$

$$-x = -3,5296$$

$$x = 3,5296$$

f) $21^{4x} = 0,35$

$$\log_{21} 0,35 = 4x$$

$$-0,3448 = 4x$$

$$x = -0,0862$$

7 Pour chacune des fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = 2(3)^{x-5} - 7$

$$0 = 2(3)^{x-5} - 7$$

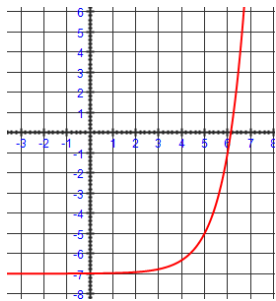
$$7 = 2(3)^{x-5}$$

$$(3)^{x-5} = 3,5$$

$$\log_3 3,5 = x - 5$$

$$x - 5 = 1,14$$

$$x = 6,14$$



c) $h(x) = 0,5(3)^{5-x} - 2$

$$0 = 0,5(3)^{5-x} - 2$$

$$2 = 0,5(3)^{5-x}$$

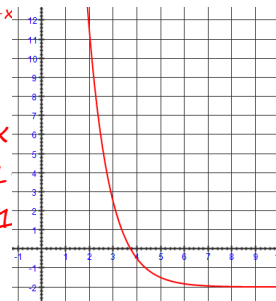
$$(3)^{5-x} = 4$$

$$\log_3 4 = 5 - x$$

$$5 - x = 1,261$$

$$-x = -3,7381$$

$$x = 3,7381$$



e) $j(x) = -4^x + 5$

$$0 = -4^x + 5$$

$$-5 = -4^x$$

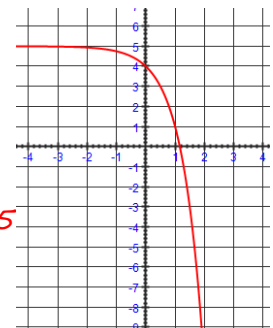
$$4^x = 5$$

$$\log_4 5 = x$$

$$x = 1,161$$

$$-x = -3,535$$

$$x = 3,535$$



10 La valeur V (en \$) d'un placement évolue selon la règle $V = 15\,000(1,015)^{2t}$, où t est le temps (en années). À quel moment la valeur du placement est-elle de :

a) 15 000 \$?

$$15000 = 15000(1,015)^{2t}$$

$$1 = (1,015)^{2t}$$

$$\log_{1,015} 1 = 2t$$

$$2t = 0$$

$$t = 0$$

b) 20 000 \$?

$$20000 = 15000(1,015)^{2t}$$

$$1,3333 = (1,015)^{2t}$$

$$\log_{1,015} 1,3333 = 2t$$

$$2t = 19,32$$

$$t = 9,66$$

c) 22 000 \$?

$$22000 = 15000(1,015)^{2t}$$

$$1,4667 = (1,015)^{2t}$$

$$\log_{1,015} 1,4667 = 2t$$

$$2t = 25,72$$

$$t = 12,86$$

12 Camille place la somme de 1500 \$ qu'elle a reçue en bourse d'études dans un compte où le taux d'intérêt annuel est de 3,5% et où les intérêts sont composés tous les 6 mois. À quel moment la valeur du placement atteint-elle 2500 \$?

$$a = 1500$$

$$c = 1 + \frac{3,5\%}{2} = 1,0175$$

$$f(x) = 2500\$$$

$$2500 = 1500(1,0175)^{2x}$$

$$1,6667 = (1,0175)^{2x}$$

$$\log_{1,0175} 1,6667 = 2x$$

$$2x = 29,445$$

$$x = 14,7$$

Au bout d'environ 14,7 années.

***Pages 373 à 377 : 5ac, 7ace, 10, 12, 14, 15, 17, 21, 22

14 **SITE D'ENFOUISSEMENT** Voici quelques renseignements concernant la dégradation de différents produits dans un site d'enfouissement :

Dégradation de différents produits

| Produit | Règle qui définit le pourcentage P de la masse subsistant x années après l'enfouissement |
|--------------------|--|
| Sac en plastique | $P = 2(0,9985)^x - 1$ |
| Mouchoir de papier | $P = 2(0,0625)^x - 1$ |
| Carton de lait | $P = 2(0,9862)^x - 1$ |
| Gomme à mâcher | $P = 2(0,8706)^x - 1$ |
| Pile alcaline | $P = 2(0,9999)^x - 1$ |

Pour chacun de ces produits, calculez le temps nécessaire à sa dégradation complète.

| <i>sac en plastique</i> | <i>mouchoir de papier</i> | <i>carton de lait</i> | <i>gomme à mâcher</i> | <i>pile alcaline</i> |
|--------------------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------|
| $0 = 2(0,9985)^x - 1$ | $0 = 2(0,0625)^x - 1$ | $0 = 2(0,9862)^x - 1$ | $0 = 2(0,8706)^x - 1$ | $0 = 2(0,9999)^x - 1$ |
| $1 = 2(0,9985)^x$ | $1 = 2(0,0625)^x$ | $1 = 2(0,9862)^x$ | $1 = 2(0,8706)^x$ | $1 = 2(0,9999)^x$ |
| $(0,9985)^x = 0,5$ | $(0,0625)^x = 0,5$ | $(0,9862)^x = 0,5$ | $(0,8706)^x = 0,5$ | $(0,9999)^x = 0,5$ |
| $\log_{0,9985} 0,5 = x$ | $\log_{0,0625} 0,5 = x$ | $\log_{0,9862} 0,5 = x$ | $\log_{0,8706} 0,5 = x$ | $\log_{0,9999} 0,5 = x$ |
| $x = 461,75 \text{ ans}$ | $x = 0,25 \text{ an}$ | $x = 49,88 \text{ ans}$ | $x = 5 \text{ ans}$ | $x = 6931,13 \text{ ans}$ |

15 Dans une région tropicale, la température journalière T (en °C) varie selon la règle $T = 2s + 20$, où s représente le temps écoulé (en semaines) depuis le 1^{er} mai. Dans cette région, la densité D des populations larvaires de moustiques (en nombre de larves/m³ d'eau) dans les étangs évolue selon la règle $D = 0,1(1,26)^T$, où T correspond à la température journalière (en °C). Les autorités de la santé publique considèrent qu'une mise en garde doit être émise lorsque la densité larvaire atteint 200 larves/m³ d'eau. Combien de temps après le 1^{er} mai la mise en garde doit-elle être émise ?

$$D = 0,1(1,26)^{2s+20}$$

$$\frac{200}{0,1} = \frac{0,1(1,26)^{2s+20}}{0,1}$$

$$2000 = (1,26)^{2s+20}$$

$$\log_{1,26} 2000 = 2s + 20$$

$$32,89 = 2s + 20$$

$$12,89 = 2s$$

$$s = 6,44$$

Il faudra les avertir vers la mi juin.

***Pages 373 à 377 : 5ac, 7ace, 10, 12, 14, 15, 17, 21, 22

- 17** Une entreprise de téléphonie cellulaire voit son nombre N d'abonnés augmenter selon la règle $N = 15\,000(1,15)^t$, où t correspond au temps écoulé (en années) depuis l'installation de son réseau. La capacité maximale du réseau est de 500 000 abonnés. À quel moment ce réseau atteint-il sa capacité maximale?

$$N = 15000(1,15)^t$$

$$\frac{500000}{15000} = \frac{15000(1,15)^t}{15000}$$

$$33,33 = (1,15)^t$$

$$\log_{1,15} 33,33 = t$$

$$t = 25,09 \text{ années}$$

Il aura atteint sa capacité au bout de 25 ans.

- 21** En finance, pour le calcul des intérêts composés continuellement, on utilise la règle $A = Pe^{rt}$, où A représente la valeur finale (en \$) d'un placement ou d'un emprunt P (en \$) à un taux d'intérêt annuel r pendant t années.

a) À quel taux d'intérêt doit-on placer un montant de 5000 \$ pour qu'il:

- 1) atteigne 7500 \$ en 5 ans? 2) double en 12 ans? 3) triple en 24 ans?

| | | | | | |
|---------------------|---|----------------------|---|----------------------|---|
| | $A = Pe^{rt}$ | | $A = Pe^{rt}$ | | $A = Pe^{rt}$ |
| | $7500 = 5000e^{r(5)}$ | | $10000 = 5000e^{r(12)}$ | | $15000 = 5000e^{r(24)}$ |
| $A = 7500\$$ | $\frac{7500}{5000} = \frac{5000e^{5r}}{5000}$ | $A = 10000\$$ | $\frac{10000}{5000} = \frac{5000e^{12r}}{5000}$ | $A = 15000\$$ | $\frac{15000}{5000} = \frac{5000e^{24r}}{5000}$ |
| $P = 5000\$$ | $1,5 = e^{5r}$ | $P = 5000\$$ | $2 = e^{12r}$ | $P = 5000\$$ | $3 = e^{24r}$ |
| $t = 5 \text{ ans}$ | $\ln 1,5 = 5r$ | $t = 12 \text{ ans}$ | $\ln 2 = 12r$ | $t = 24 \text{ ans}$ | $\ln 3 = 24r$ |
| $r = ?$ | $r = 0,08109$ | $r = ?$ | $r = 0,05776$ | $r = ?$ | $r = 0,04578$ |
| | $r = 8,109\%$ | | $r = 5,776\%$ | | $r = 4,578\%$ |

b) Pendant combien de temps doit-on placer un montant de 8000 \$ à un taux d'intérêt annuel de 4,5% pour qu'il:

- 1) atteigne 10 000 \$? 2) double? 3) triple?

| | | | | | |
|---------------|--|---------------|--|---------------|--|
| | $A = Pe^{rt}$ | | $A = Pe^{rt}$ | | $A = Pe^{rt}$ |
| | $10000 = 8000e^{4,5\%t}$ | | $16000 = 8000e^{4,5\%t}$ | | $24000 = 8000e^{4,5\%t}$ |
| $A = 10000\$$ | $\frac{10000}{8000} = \frac{8000e^{4,5\%t}}{8000}$ | $A = 16000\$$ | $\frac{16000}{8000} = \frac{8000e^{4,5\%t}}{8000}$ | $A = 24000\$$ | $\frac{24000}{8000} = \frac{8000e^{4,5\%t}}{8000}$ |
| $P = 8000\$$ | $1,25 = e^{4,5\%t}$ | $P = 8000\$$ | $2 = e^{4,5\%t}$ | $P = 8000\$$ | $3 = e^{4,5\%t}$ |
| $t = ?$ | $\ln 1,25 = 4,5\%t$ | $t = ?$ | $\ln 2 = 4,5\%t$ | $t = ?$ | $\ln 3 = 4,5\%t$ |
| $r = 4,5\%$ | $t = 5 \text{ ans}$ | $r = 4,5\%$ | $t = 15,4 \text{ ans}$ | $r = 4,5\%$ | $t = 24,4 \text{ ans}$ |

c) Établissez la règle permettant de calculer:

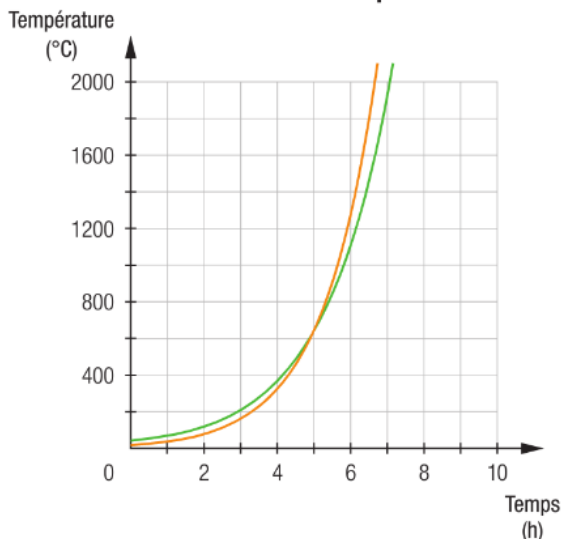
- 1) le taux d'intérêt requis pour qu'un placement P double après t années;
 2) le temps requis pour qu'un placement P double s'il est placé à un taux d'intérêt annuel r .

| | | | | | |
|----|----------|-----------------------|----|----------|-----------------------|
| 1) | $A = 2P$ | $A = Pe^{rt}$ | 2) | $A = 2P$ | $A = Pe^{rt}$ |
| | $P = P$ | $2P = Pe^{rt}$ | | $P = P$ | $2P = Pe^{rt}$ |
| | $t = t$ | $2 = e^{rt}$ | | $t = ?$ | $2 = e^{rt}$ |
| | $r = ?$ | $\ln 2 = rt$ | | $r = r$ | $\ln 2 = rt$ |
| | | $r = \frac{\ln 2}{t}$ | | | $t = \frac{\ln 2}{r}$ |

***Pages 373 à 377 : 5acf, 7ace, 10, 12, 14, 15, 17, 21, 22

- 22** Le graphique ci-dessous indique la température de deux alliages selon le temps passé dans deux fours séparés.

Température de deux alliages selon le temps



La température du premier alliage évolue selon la règle $T = 20(2)^x$ et celle du second alliage, selon la règle $T = 40(4)^{\frac{2x}{5}}$, où T représente la température (en °C) et x , le temps (en h).

- Pour chacun des alliages, déterminez la température initiale.
- À quel moment la température des deux alliages est-elle la même?
- À quel moment la température du premier alliage est-elle égale au double de celle du second alliage?

$$\begin{aligned}
 & T = 20(2)^x \\
 \text{a) } & T = 20(2)^0 \quad \text{et} \quad T = 40(4)^{\frac{2x}{5}} \\
 & T = 20^\circ\text{C} \quad \quad \quad T = 40^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 20(2)^x = 40(4)^{\frac{2x}{5}} \\
 & (2)^x = 2(2^2)^{\frac{2x}{5}} \\
 & (2)^x = (2)^{2 \times \frac{2x}{5} + 1} \\
 \text{b) } & x = 2 \times \frac{2x}{5} + 1 \\
 & 5x = 4x + 5 \\
 & x = 5 \\
 & \text{après 5 heures}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 20(2)^x = 2 \times 40(4)^{\frac{2x}{5}} \\
 & (2)^x = 2 \times 2(2^2)^{\frac{2x}{5}} \\
 & (2)^x = (2)^{2 \times \frac{2x}{5} + 1 + 1} \\
 \text{c) } & x = 2 \times \frac{2x}{5} + 2 \\
 & 5x = 4x + 10 \\
 & x = 10 \\
 & \text{après 10 heures}
 \end{aligned}$$