Ex. 5,5 p.272 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 43abcd

Détermine la valeur exacte de chaque expression.

1. $\sin 65° \cos 35° - \cos 65° \sin 35°$
$= \sin(65° - 35°)$
$= \sin 30°$
$= \frac{1}{2}$

3. $\cos 25° \cos 5° - \sin 25° \sin 5°$
$= \cos(25° + 5°)$
$= \cos 30°$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\sin \pi/3 \cos \pi/6 + \cos \pi/3 \sin \pi/6$
$= \sin(\pi/3 + \pi/6)$
$= \sin 3\pi/6$
$= \sin \pi/2 = 1$

7. $\sin 40° \cos 50° + \cos 40° \sin 50°$
$= \sin(40° + 50°)$
$= \sin 90°$
$= 1$

Détermine la valeur exacte de chaque expression. Tu dois choisir des valeurs de $\prec A$ et de $\prec B$ et appliquer une identité d'addition ou de soustraction approprié.

9. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos(120°)$
$= \cos(30° + 90°)$
$= \cos 30° \cos 90° - \sin 30° \sin 90°$
$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0) - \left(\frac{1}{2}\right)(1) = -\frac{1}{2}$

11. $\sin 105°$
$= \sin(45° + 60°)$
$= \sin 45° \cos 60° + \cos 45° \sin 60°$
$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

13. $\tan 105°$
$= \tan(45° + 60°)$
$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1\sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$
$= \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + 3}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 3}$
$= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$

15. $\sin(-105)°$
$= \sin(0° - 105°)$
$= \sin(0°)\cos(105°) - \cos(0°)\sin(105°)$
$= 0(\cos(60° + 45°)) - 1(\sin(60° + 45°))$
$= 0 - (\sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°)$
$= 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
$= -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Ex. 5,5 p.272 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 43abcd

Récris chaque expression sous la forme d'une fonction trigonométrique simple.

17. $2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}$

$= \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

19. $\cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

21. $\dfrac{\tan\pi - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\pi\tan\frac{\pi}{6}}$

$= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right)$

$= \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

23. $\sin\pi\cos\frac{\pi}{4} + \cos\pi\sin\frac{\pi}{4}$

$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\frac{4\pi + \pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Utilise les identités d'addition et de soustraction pour prouver chaque identité.

25. $\sin(90° + A) = \cos A$

$\sin 90°\cos A + \cos 90°\sin A = \cos A$

$1\cos A + 0\sin A = \cos A$

$\cos A = \cos A$

27. $\cos(90° - A) = \sin A$

$\cos 90°\cos A + \sin 90°\sin A = \sin A$

$0\cos A + 1\sin A = \sin A$

$\sin A = \sin A$

29. $\sin(\pi + A) = -\sin A$

$\sin\pi\cos A + \cos\pi\sin A = -\sin A$

$0\cos A + (-1)\sin A = -\sin A$

$-\sin A = -\sin A$

31. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A$

$\sin\frac{\pi}{2}\cos A - \cos\frac{\pi}{2}\sin A = \cos A$

$1\cos A - 0\sin A = \cos A$

$\cos A = \cos A$

Détermine si chaque équation est vraie et justifie ta conclusion.

33. $\cos 140° = \cos 60°\cos 80° - \sin 60°\sin 80°$

$\cos 140° = \cos(60° + 80°)$

$\cos 140° = \cos 140°$

35. $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{2\pi + 3\pi}{12}\right)$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{5\pi}{12}$

Ex. 5,5 p.272 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 43abcd

37. Suppose que $\prec A$ et $\prec B$ se trouvent dans le quadrant I, que $\sin A = \frac{3}{5}$, et que $\cos B = \frac{5}{13}$. Trouve la valeur de chaque expression.

$r^2 = x^2 + y^2$
$25 = x^2 + 9$
$x^2 = 16$
$x = \pm 4$ quadrant I $x = 4$

$\sin A = \frac{3}{5} = \frac{y}{r}$
$\cos A = \frac{4}{5}$
$\tan A = \frac{3}{4}$

$r^2 = x^2 + y^2$
$169 = 25 + y^2$
$144 = y^2$
$y = \pm 12$ quadrant I $y = 12$

$\sin B = \frac{12}{13}$
$\cos B = \frac{5}{13}$
$\tan B = \frac{12}{5}$

a) $\cos(A - B)$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$$
$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13}$$
$$= \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$$

b) $\sin(A + B)$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13}$$
$$= \frac{15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$$

c) $\tan(A + B)$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$
$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{12}{5}}$$
$$= \frac{\frac{63}{20}}{\frac{-4}{5}} = \frac{63}{20} \times \frac{-5}{4} = \frac{-63}{16}$$

38. Évalue $\tan(A - B)$, sachant que $\tan A = \frac{4}{3}$, $\cos B = \frac{12}{13}$ et que les deux angles se trouvent dans le quadrant I.

$r^2 = x^2 + y^2$
$r = \sqrt{9 + 16}$
$r = \sqrt{25}$
$r = \pm 5$ r est toujours $+$

$\sin A = \frac{4}{5}$
$\cos A = \frac{3}{5}$
$\tan A = \frac{4}{3}$

$r^2 = x^2 + y^2$
$169 = 144 + y^2$
$25 = y^2$
$y = \pm 5$ quadrant I $y = 5$

$\sin B = \frac{5}{13}$
$\cos B = \frac{12}{13}$
$\tan B = \frac{5}{12}$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{4}{3} \times \frac{5}{12}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{14}{9}} = \frac{11}{12} \times \frac{9}{14} = \frac{33}{56}$$

Ex. 5,5 p.272 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 43abcd

39. Suppose que $\cos A = \frac{12}{13}$ et que $\prec A$ se trouve dans le quadrant IV. Trouve la valeur exacte de sin 2A.

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$169 = 144 + y^2$$
$$25 = y^2$$
$$y = \pm 5 \quad \text{quadrant IV} \quad y = -5$$

$$\sin A = \frac{-5}{13}$$
$$\cos A = \frac{12}{13}$$
$$\tan A = \frac{-5}{12}$$

$$\sin 2A = \sin A \cos A - \sin A \cos A$$
$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$
$$\sin 2A = 2\left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{-120}{169}$$

40. Suppose que $\prec P$ se trouve dans le quadrant I de telle manière que $\sin P = \frac{3}{5}$ et que $\prec Q$ se trouve dans le quadrant II de telle manière que $\cos Q = \frac{-5}{13}$. Détermine la valeur de chaque expression.

a)

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$25 = x^2 + 9$$
$$16 = x^2$$
$$x = \pm 4 \quad \text{quadrant I} \quad x = 4$$

$$\sin P = \frac{3}{5}$$
$$\cos P = \frac{4}{5}$$
$$\tan P = \frac{3}{4}$$

b)

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$169 = 25 + y^2$$
$$144 = y^2$$
$$y = \pm 12 \quad \text{quadrant II} \quad y = 12$$

$$\sin Q = \frac{12}{13}$$
$$\cos Q = \frac{-5}{13}$$
$$\tan Q = \frac{12}{-5}$$

c) $\sin(P+Q)$

$$= \sin P \cos Q + \cos P \sin Q$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$
$$= \frac{-15}{65} + \frac{48}{65} = \frac{33}{65}$$

d) $\cos(P+Q)$

$$= \cos P \cos Q - \sin P \sin Q$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$
$$= \frac{-20}{65} - \frac{36}{65} = \frac{-56}{65}$$

e) Dans quel quadrant $\prec (P+Q)$ se trouve-t-il? Le sin est + et le cos est – donc II^e quadrant

Ex. 5,5 p.272 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 43abcd

43. Prouve chaque équation algébriquement. Ensuite, compare les graphiques des fonctions définies par le membre de gauche et le membre de droite de l'équation. Note : les deux fonctions que tu as représentées graphiquement et dessine le graphique obtenu.

a) $\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \cot anx$

$$\frac{1+\cos(x+x)}{\sin(x+x)} = \cot anx$$

$$\frac{1+\cos x\cos x - \sin x\sin x}{\sin x\cos x + \cos x\sin x} = \cot anx$$

$$\frac{1+\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \cot anx$$

$$\frac{1-\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \cot anx$$

$$\frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \cot anx$$

$$\frac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \cot anx$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \cot anx$$

$$\cot anx = \cot anx$$

b) $\sec^2 x = \frac{2}{1+\cos 2x}$

$$\sec^2 x = \frac{2}{1+\cos(x+x)}$$

$$\sec^2 x = \frac{2}{1+\cos x\cos x - \sin x\sin x}$$

$$\sec^2 x = \frac{2}{1+\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$\sec^2 x = \frac{2}{1-\sin^2 x + \cos^2 x}$$

$$\sec^2 x = \frac{2}{\cos^2 x + \cos^2 x}$$

$$\sec^2 x = \frac{2}{2\cos^2 x}$$

$$\sec^2 x = \sec^2 x$$

Ex. 5,5 p.272 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 43abcd

c) $\cos 3x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$

$\cos(2x + x) + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$

$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$

$\cos(x + x)\cos x - \sin(x + x)\sin x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$

$(\cos x \cos x - \sin x \sin x)\cos x - (\sin x \cos x + \cos x \sin x)\sin x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$

$\cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$

$\cos^3 x - (1 - \cos^2 x)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$

$\cos^3 x - \cos x + \cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$

$4\cos^3 x - 3\cos x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x + 1$

d) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$

$1 + 2\sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$

$1 + 2\sin x \cos x = \sin^2 x + \sin x \cos x + \sin x \cos x + \cos^2 x$

$1 + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$

e) $\sin(x + y)\sin(x - y) = \sin^2 x - \cos^2 y$

$(\sin x \cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y) = \sin^2 x - \cos^2 y$

$\sin^2 x \cos^2 y + \sin x \cos y \cos x \sin y - \sin x \cos y \cos x \sin y - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \cos^2 y$

$\sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \cos^2 y$

$\sin^2 x(1 - \sin^2 y) - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \cos^2 y$?????

$\sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \cos^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \cos^2 y$

$\sin^2 x - \sin^2 y(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 y$

$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin^2 x - \cos^2 y$