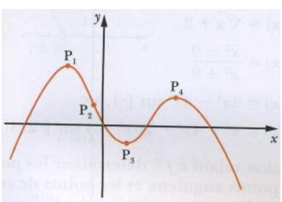
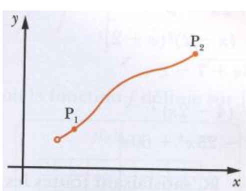
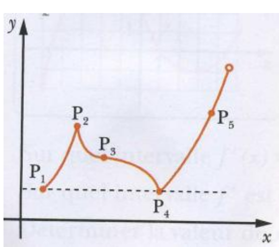
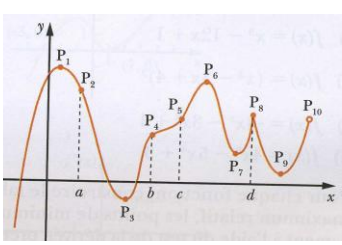
Math 30421
Module 4 – Étude de la fonction

Ex 6. 1: p.211   # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

*Ex 6.1 : p. 211*

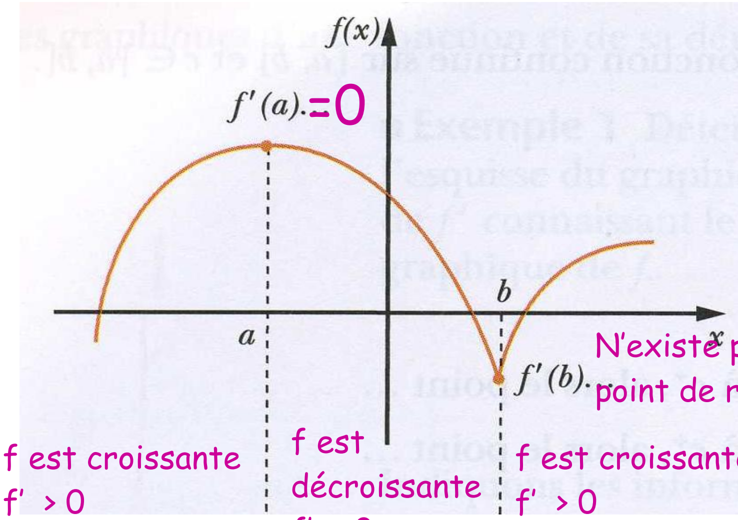
1. Compléter les énoncés suivants, sachant que f est une fonction continue sur [a, b] et c E ]a, b[.
   a) Si f'(x) > 0 sur ]a, b[, alors … la fonction f est croissante sur [a, b].
   b) Si f'(x) < 0 sur ]a, b[, alors … la fonction est décroissante sur [a, b].
   c) C est un nombre critique de f si … f'(c) = 0 ou f'(c) n'existe pas.
   d) Si f'(c) = 0, alors (c, f(c)) est … un nombre stationnaire.
   e) Si f'(x) passe du « + » au « - » lorsque x passe de $c^-$ à $c^+$, alors le point … (c, f(c)) est maximum
   f) Si f'(x) passe du « - » au « + » lorsque x passe de $c^-$ à $c^+$, alors le point … (c, f(c)) est minimum

3. Pour chaque courbe, déterminer le(s) :

| | i) minimum(s) relatif(s) ; | ii) minimum(s) absolu(s) ; | iii) maximum(s) relatif(s) ; | iv) maximum(s) absolu(s) ; | v) point anguleux ; | vi) point de rebroussement |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a)  | $P_3$ | Aucun | $P_1$, $P_4$ | $P_1$ | Aucun | Aucun |
| b)  | Aucun | Aucun | $P_2$ | $P_2$ | Aucun | Aucun |
| c)  | $P_1$, $P_4$ | $P_1$, $P_4$ | $P_2$ | Aucun | $P_4$ | $P_2$ |
| d)  | $P_3$, $P_7$, $P_9$ | Aucun | $P_1$, $P_6$, $P_8$ | $P_1$ | Aucun | $P_8$ |
| e) Même courbe qu'en d) sur [a, b]. | $P_3$ | $P_3$ | $P_2$, $P_4$ | $P_2$ | Aucun | Aucun |
| f) Même courbe qu'en d) sur ]c, d]. | $P_7$ | $P_7$ | $P_6$, $P_8$ | $P_6$ | Aucun | aucun |

Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

4. Compléter. Soit la fonction f définie par le graphique suivant.




N'existe pas,
point de rebroussement

f est croissante
f' > 0

f est
décroissante
f' < 0

f est croissante
f' > 0

5. Construire le tableau de variation relatif à f' à partir des équations de f'.

a) $f'(x) = x^2(x-3)$

2[e] étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = x^2(x-3) = 0$
$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3$

ou

$f'(x) = x^2(x-3)$ n'existe pas
aucun

3[e] étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | 0 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | – | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | f(0) | ↘ | f(3) | ↗ |
| | | | | min | |

b) $f'(x) = x(x-1)^2(x+2)(x-3)$

2[e] étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = x(x-1)^2(x+2)(x-3) = 0$
$x = 0, 1, -2$ ou 3

ou

$f'(x) = x(x-1)^2(x+2)(x-3)$ n'existe pas
aucun

3[e] étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | -2 | | 0 | | 1 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | f(-2) | ↗ | f(0) | ↘ | f(1) | ↘ | f(3) | ↗ |
| | | Min. | | Max. | | | | Min. | |

Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

c) $f'(x) = (x^2 - 1)x^3$

2$^e$ étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = x^3(x-1)(x+1) = 0$ ou $f'(x) = x^3(x-1)(x+1)$ n'existe pas

$x = 0, 1$ ou $-1$ aucun

3$^e$ étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | -1 | | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | f(-1) | ↗ | f(0) | ↘ | f(1) | ↗ |
| | | Min. | | Max. | | Min. | |

d) $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2(3-x)}{7x^2}$

2$^e$ étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = \dfrac{(x-2)^2(3-x)}{7x^2} = 0$ ou $f'(x) = \dfrac{(x-2)^2(3-x)}{7x^2}$ n'existe pas

$x = 2$ ou $3$ $x = 0$

3$^e$ étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | 0 | | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | $\nexists$ | + | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↗ | f(0) | ↗ | f(2) | ↗ | f(3) | ↘ |
| | | | | | | Max. | |

6. Pour chacune des fonctions suivantes, construire le tableau de variation relatif à f' et déterminer, si possible, les intervalles de croissance, de décroissance, les maximums relatifs, les minimums relatifs, les points de maximum relatif et les points de minimum relatif de f.

a) $f(x) = x^3 - 12x + 1$

1$^{ère}$ étape : Calculer et factoriser, si possible f'(x).

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$

2$^e$ étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = 3(x-2)(x+2) = 0$ ou $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$ n'existe pas

$x = 2$ ou $-2$ aucun

3$^e$ étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | -2 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 17 | ↘ | -15 | ↗ |
| | | Max. | | Min. | |

f est croissante sur $]-\infty,-2] \cup [2,\infty[$

f est décroissante sur $[-2,2]$

maximum relatif de 17

minimum relatif de -15

point de maximum relatif (-2, 17)

point de minimum relatif (2, -15)

Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

c) $f(x) = -4x^5 - 3x^3 + 1$

$1^{ère}$ étape : Calculer et factoriser, si possible f'(x).

$f'(x) = -20x^4 - 9x^2 = -x^2(20x^2 + 9)$

$2^e$ étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = -x^2(20x^2 + 9) = 0$
$x = 0$

ou

$f'(x) = -x^2(20x^2 + 9)$ n'existe pas
aucun

$3^e$ étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | – | 0 | – |
| f(x) | ↘ | 1 | ↘ |
| f est décroissante sur $\mathbb{R}$ | | | |

e) $f(x) = \sqrt[5]{x} + 2$

$1^{ère}$ étape : Calculer et factoriser, si possible f'(x).

$f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

$2^e$ étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} = 0$
aucun

ou

$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ n'existe pas
$x = 0$

$3^e$ étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | + | $\nexists$ | + |
| f(x) | ↗ | 2 | ↗ |
| f est croissante sur $\mathbb{R}$ | | | |

Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

g) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ sur $[-1, +\infty[$

1ère étape : Calculer et factoriser, si possible f′(x).

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$

2e étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = 12x^2(x-1) = 0$
$x = 0$ ou $1$

ou

$f'(x) = 12x^2(x-1)$ n'existe pas
$x = -1$

3e étape : construire le tableau de variation relatif à f′.

| x | -1 | | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | $\nexists$ | – | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | 7 | ↘ | 0 | ↘ | -1 | ↗ |
| | Max. | | | | Min. | |

f est croissante sur $[1, \infty[$

maximum relatif de 7

point de maximum relatif (-1, 7)

f est décroissante sur $[-1, 1]$

minimum relatif de -1

point de minimum relatif (1, -1)

7. Pour chaque fonction, construire le tableau de variation relatif à f′, déterminer les points de maximum relatif, les points de minimum relatif, les points anguleux et les points de rebroussement à l'aide du test de la dérivée première et esquisser le graphique de f.

a) $f(x) = 4 - (x-5)^2$ sur $[3, 6[$

1ère étape : Calculer et factoriser, si possible f′(x).

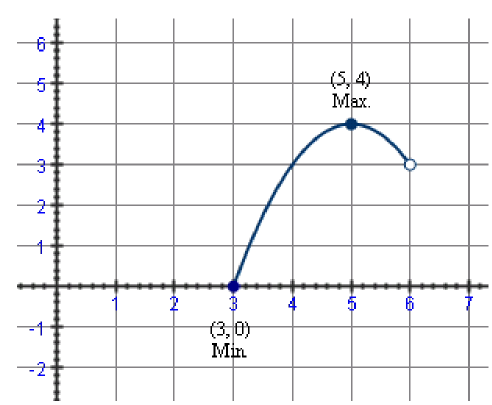
$f'(x) = -2(x-5)(1) = -2(x-5)$

2e étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = -2(x-5) = 0$
$x = 5$

ou

$f'(x) = -2(x-5)$ n'existe pas
$x = 3$ et $x = 6$

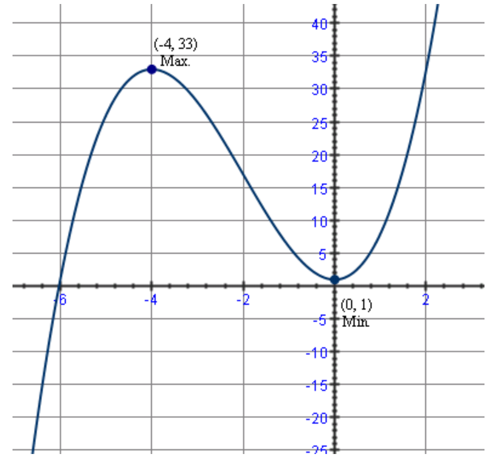



3e étape : construire le tableau de variation relatif à f′.

| x | 3 | | 5 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | $\nexists$ | + | 0 | – | $\nexists$ |
| f(x) | 0 | ↗ | 4 | ↘ | 3 |
| | Min. | | Max. | | |

Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 1$




1ère étape : Calculer et factoriser, si possible f'(x).

$f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$

2e étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = 3x(x+4) = 0$ ou $f'(x) = 3x(x+4)$ n'existe pas

$x = 0$ ou $x = -4$ — aucun

3e étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | -4 | | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 33 | ↘ | 1 | ↗ |
| | | Max. | | Min. | |

e) $f(x) = 3 + |x-5| = \begin{cases} 3+x-5 & \text{si } x > 5 \\ 3-x+5 & \text{si } x < 5 \end{cases}$

1ère étape : Calculer et factoriser, si possible f'(x).

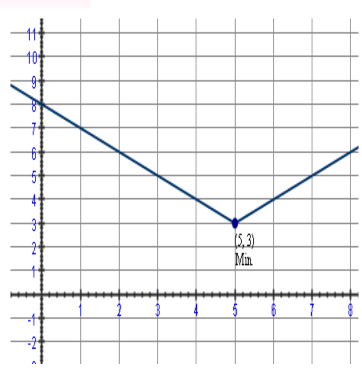
$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 5 \\ -1 & \text{si } x < 5 \end{cases}$, donc f'(5) n'existe pas

2e étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 5 \\ -1 & \text{si } x < 5 \end{cases} = 0$ ou $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 5 \\ -1 & \text{si } x < 5 \end{cases}$ n'existe pas

aucun — $x = 5$

3e étape : construire le tableau de variation relatif à f'.




| x | $-\infty$ | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | – | ∄ | + |
| f(x) | ↘ | 3 | ↗ |
| | | Min. | |

(5, 3) est un point anguleux.

Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

g) $f(x) = 7 - (x-2)^2(x+2)^2$

1ère étape : Calculer et factoriser, si possible f'(x).

$$f'(x) = 0 - \left[2(x-2)(1)(x+2)^2 + (x-2)^2(2)(x+2)(1)\right]$$

$$f'(x) = -2(x-2)(1)(x+2)^2 - (x-2)^2(2)(x+2)(1) = -2(x-2)(x+2)(x+2+x-2) = -4x(x-2)(x+2)$$

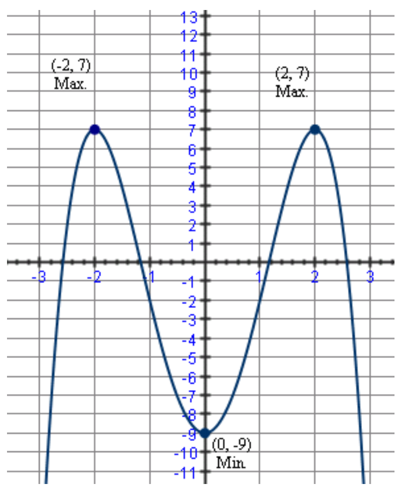
2e étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = -4x(x-2)(x+2) = 0$ ou $f'(x) = -4x(x-2)(x+2)$ n'existe pas

$x = 0, 2$ ou $x = -2$ aucun

3e étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | -2 | | 0 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↗ | 7 | ↘ | -9 | ↗ | 7 | ↘ |
| | | Max. | | Min. | | Max. | |




i) $f(x) = 3 + (4-2x)^{\frac{2}{3}}$

1ère étape : Calculer et factoriser, si possible f'(x).

$$f'(x) = \frac{2}{3}(4-2x)^{\frac{-1}{3}}(-2) = \frac{-4}{3\sqrt[3]{4-2x}}$$

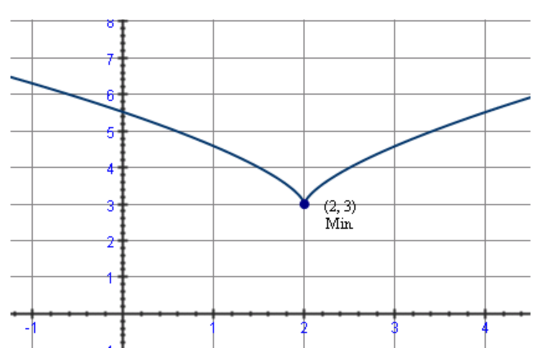
2e étape : Déterminer les nombres critiques.

$f'(x) = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{4-2x}} = 0$ ou $f'(x) = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{4-2x}}$ n'existe pas

aucun $x = 2$

3e étape : construire le tableau de variation relatif à f'.

| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | – | ∄ | + |
| f(x) | ↘ | 3 | ↗ |
| | | Min. | |




(2, 3) est un point de rebroussement.

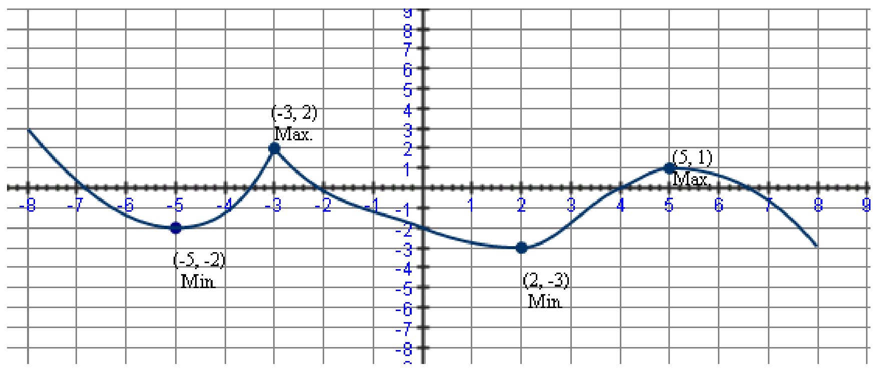
Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

8. Esquisser un graphique possible d'une fonction f, où dom f = R, satisfaisant toutes les conditions suivantes :

$f'(-5) = 0$ et $f(-5) = -2$; $f'(-3) \nexists$ et $f(-3) = 2$; $f'(2) = 0$ et $f(2) = -3$; $f'(5) = 0$ et $f(5) = 1$;

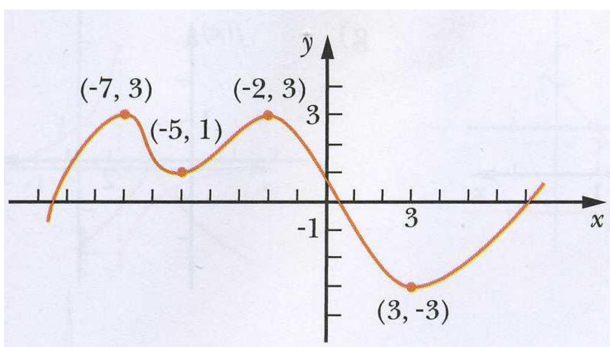
$f'(x) < 0$ sur $]-\infty, -5[ \cup ]-3, 2[ \cup ]5, +\infty[$ ; $f'(x) > 0$ sur $]-5, -3[ \cup ]2, 5[$.

| x | $-\infty$ | -5 | | -3 | | 2 | | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | − | 0 | + | ∄ | − | 0 | + | 0 | − |
| f(x) | ↘ | -2 | ↗ | 2 | ↘ | -3 | ↗ | 1 | ↘ |
| | | Min. | | Max. | | Min. | | Max. | |




9. Connaissant le graphique de f, construire le tableau de variation relatif à f'.

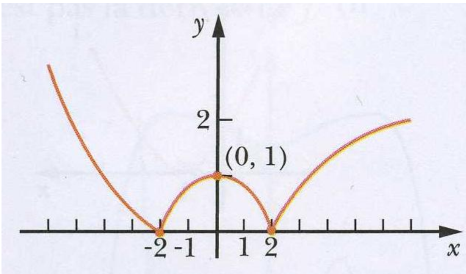
a)




| x | $-\infty$ | -7 | | -5 | | -2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| f(x) | ↗ | 3 | ↘ | 1 | ↗ | 3 | ↘ | -3 | ↗ |
| | | Max. | | Min. | | Max. | | Min. | |

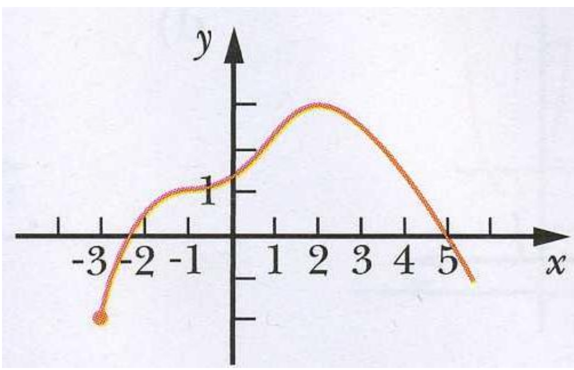
Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

b)




| x | $-\infty$ | -2 | | 0 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | ∄ | + | 0 | – | ∄ | + |
| f(x) | ↘ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↗ |
| | | Min. | | Max. | | Min. | |

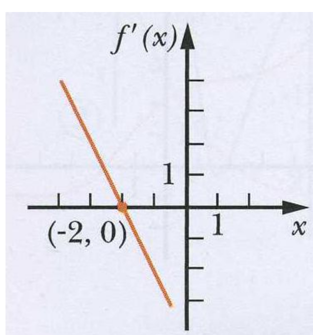
c)

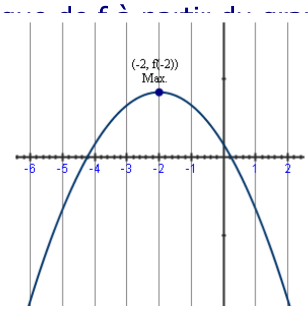



| x | -3 | | -1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | ∄ | + | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | -2 | ↗ | 1 | ↗ | 3 | ↘ |
| | Min. | | | | Max. | |

10. Construire le tableau de f relatif à f′ et donner une esquisse possible du graphi[illegible]hique de f′(x).a)

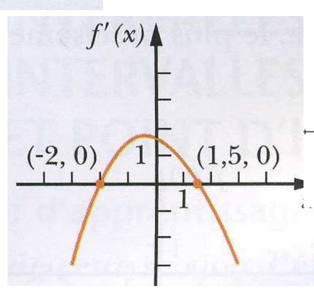
| x | $-\infty$ | -2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f′(x) | + | 0 | – |
| f(x) | ↗ | f(-2) | ↘ |
| | | Max. | |

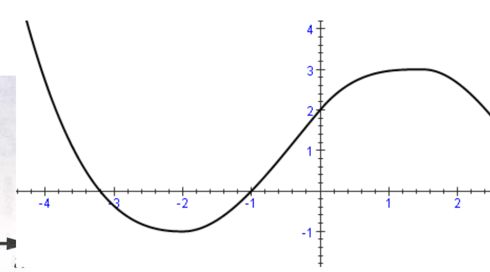



b)

| x | $-\infty$ | -2 | | 1,5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ↘ | f(-2) | ↗ | f(1,5) | ↘ |
| | | Min. | | Max. | |

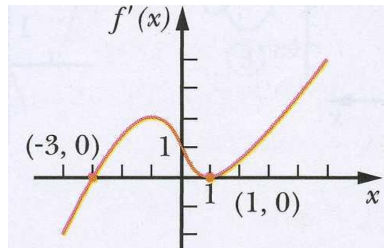


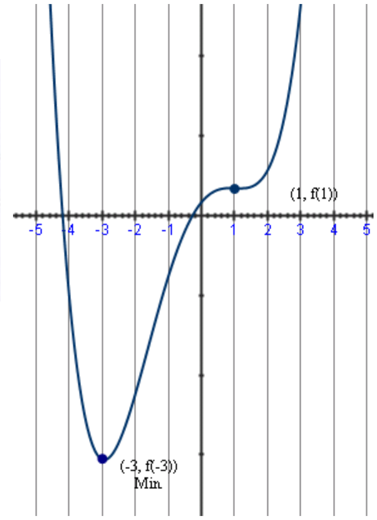



Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

c)

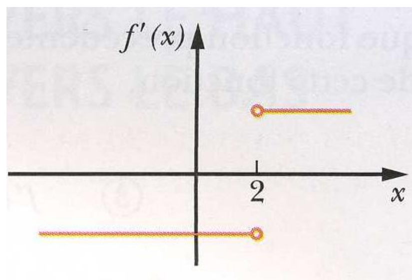
| x | $-\infty$ | -3 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | – | 0 | + | 0 | + |
| f(x) | ↘ | f(-3) | ↗ | f(1) | ↗ |
| | | Min. | | | |

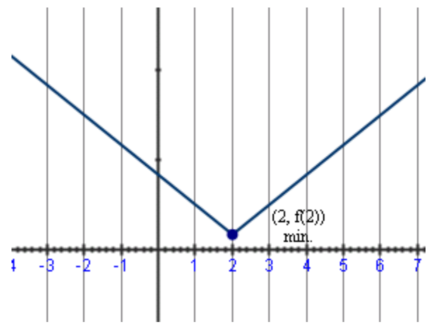


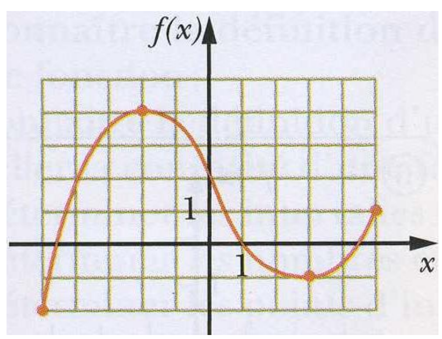

d)

| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | – | ∄ | + |
| f(x) | ↘ | f(2) | ↗ |
| | | Min. | |




11. Soit la fonction f définie sur [-5, 5] par le graphique suivant.




a) Sur quel intervalle $f'(x) \leq 0$ ?

$[-2,3]$, le graphique de f est décroissant

b) Sur quel intervalle f′ est décroissante ?

$]-5,0[$, la pente diminue sur cet intervalle

c) Déterminer la valeur de x telle que f′ soit minimale. Estimer la valeur minimale de f′.

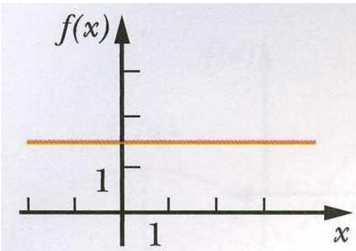
Vers x = 0, elle commence à augmenter à nouveau.

La pente est alentour de -3

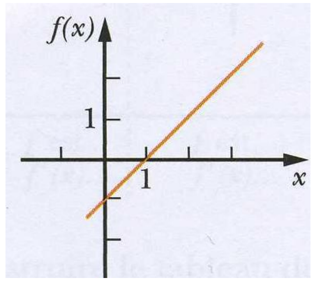
Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

12. Soit les graphiques de différentes fonctions.

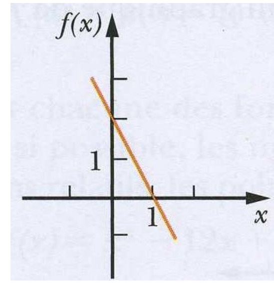
a) 6



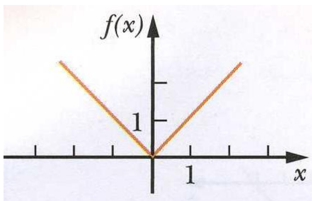

b) 1



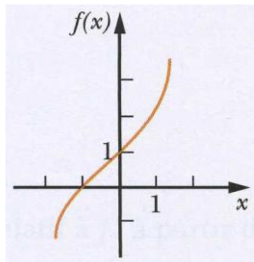

c) 8



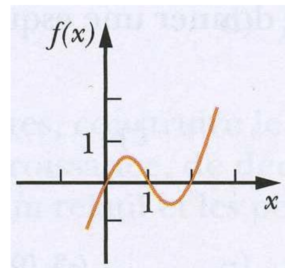

d) 3



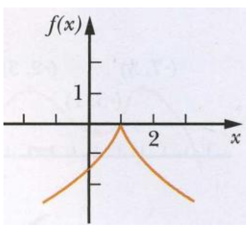

e) 9



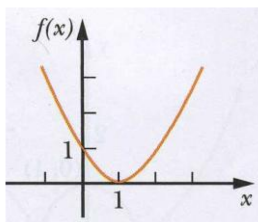

f) 4



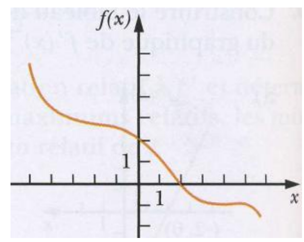

g) 7




h) 2

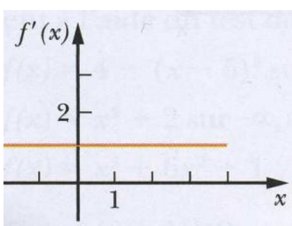



i) 5

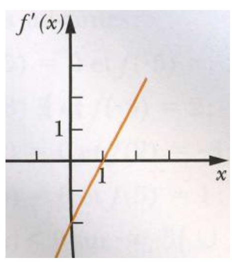



Les graphiques suivants représentent les dérivées des fonctions représentées précédemment. Associer à chaque fonction précédente le graphique qui représente, le plus précisément possible, la dérivée de cette fonction.

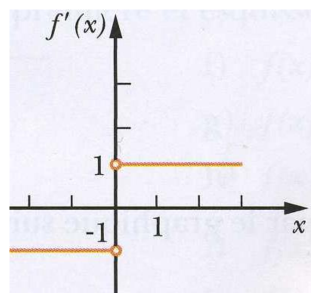
1)



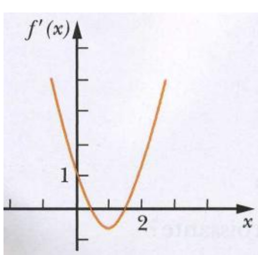

2)



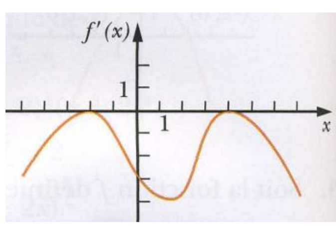

3)



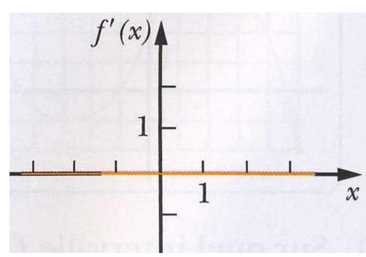

4)



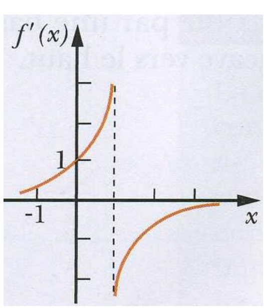

5)



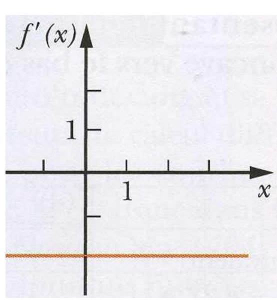

6)



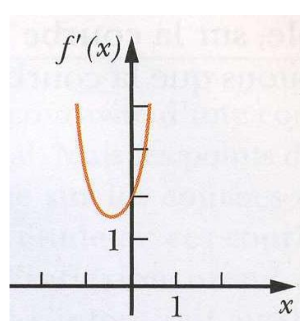

7)




8)



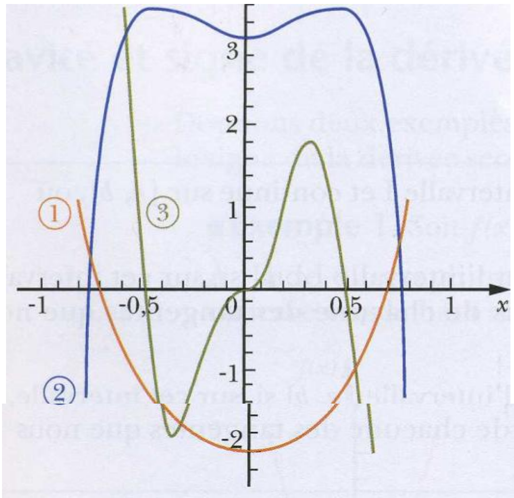

9)



Ex 6. 1: p.211 # 1, 3, 4, 5, 6aceg, 7acegi, 8, 9, 10, 11, 12, 13

13. Déterminer dans les représentations suivantes la fonction f, la fonction f' et la fonction g qui n'est pas la dérivée de f

a)

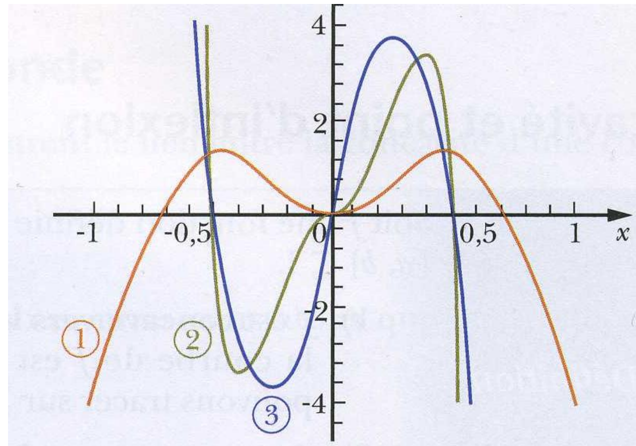



La fonction f ; 2

La fonction f' ; 3

La fonction g : 1

b)




La fonction f ; 1

La fonction f' ; 3

La fonction g : 2