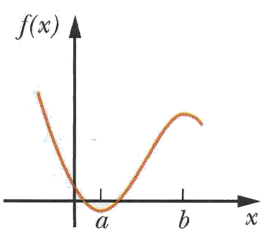
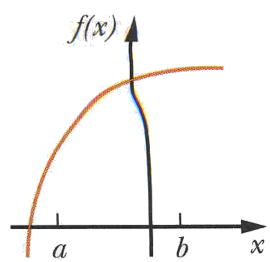
Ex 6. 2: p.224 # 1, 2, 3, 4, 5acegi, 6ace, 7, 8, 9, 10, 11

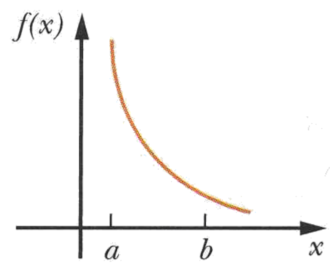
*Ex 6.2 : p. 224*

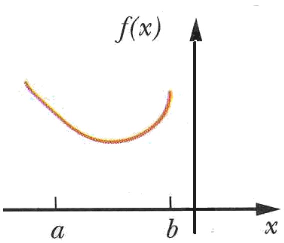
1. Compléter les énoncés suivants, sachant que f est une fonction continue sur R.
   a) Si f″(x) > 0 sur ]a, b[, alors la courbe de f est concave vers le haut.
   b) Si f″(x) < 0 sur ]a, $+\infty$[, alors la courbe de f est concave vers le bas .
   c) (c, f(c)) est un point d'inflexion de f si la courbe de f change de concavité au point (c, f(c)).
   d) (c, f(c)) est un point d'inflexion de f alors f″ change de signe lorsque x passe de $c^-$ à $c^+$.
   e) Soit une fonction f et c un nombre critique de f, tel que f′(c) = 0.
      i) Si f″(c) < 0, alors (c, f(c)) est un point maximum relatif.
      ii) Si f″(c) > 0, alors (c, f(c)) est un point minimum relatif.
      iii) Si f″(c) = 0 ou f″(c) n'existe pas, alors nous ne pouvons rien conclure.

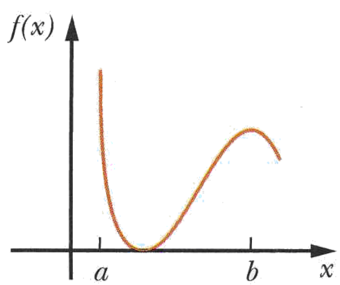
2. Repérer, parmi les courbes suivantes :
   a) les courbes concaves vers le haut sur [a, b] ; 3 et 4
   b) les courbes concaves vers le bas sur [a, b] ; 2 et 6

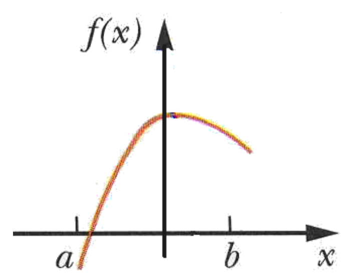
1)



2)


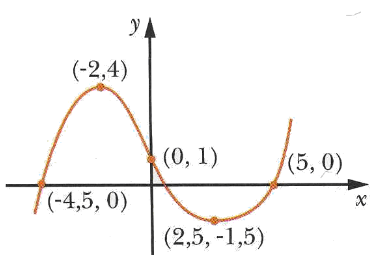

3)



4)



5)


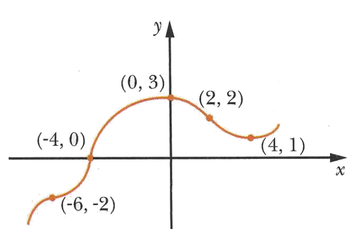

6)



3. Déterminer les points d'inflexion sur les graphiques suivants.



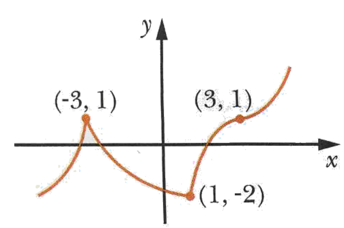

a)

(0, 1)




b)

(-6, -2), (-4, 0), (2, 2)




c)

(1, -2) (3, 1)

Ex 6. 2: p.224 # 1, 2, 3, 4, 5acegi, 6ace, 7, 8, 9, 10, 11

4. Construire le tableau de variation relatif à f″ à partir des équations de f″.

a) $f''(x) = (x-1)^3(2x+5)$

$4^e$ étape : f″(0) = 0, donc x = 1 et x = $^{-5}/_2$

| x | $-\infty$ | $^{-5}/_2$ | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | $\cup$ | f($^{-5}/_2$) | $\cap$ | f(1) | $\cup$ |
| | | Inf. | | Inf. | |

b) $f''(x) = (x^2-4)(x^2+1)(x-1)^2$

$4^e$ étape : f″(0) = 0, donc x = 2, -2 et 1

| x | $-\infty$ | -2 | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | $\cup$ | f(-2) | $\cap$ | f(1) | $\cap$ | f(2) | $\cup$ |
| | | Inf. | | | | Inf. | |

5. Pour chaque fonction, construire le tableau de variation relatif à f″ et déterminer, si possible les intervalles de concavité vers le haut, les intervalles de concavité vers le bas et les points d'inflexion de f.

a) $f(x) = x^5 - 5x + 7$

$f'(x) = 5x^4 - 5 \rightarrow f''(x) = 20x^3$

Nombre critique : x = 0

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f″(x) | - | 0 | + |
| f(x) | $\cap$ | 7 | $\cup$ |
| | | Inf. | |

f est concave vers le bas sur $]-\infty,0]$

f est concave vers le haut sur $[0,+\infty[$

point d'inflexion : (0, 7)

c) $f(x) = 3x - 4$

$f'(x) = 3 \rightarrow f''(x) = 0$

Nombre critique : Tout R

| x | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| f″(x) | 0 |
| f(x) | Ni concave vers le haut et ni concave vers le bas |

Remarque, la représentation graphique de f(x) = 3x – 4 est une droite

e) $f(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2$

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 - 48x \rightarrow f''(x) = 12x^2 - 36x - 48$

$f''(x) = 12(x^2 - 3x - 4) = 12(x-4)(x+1)$

Nombres critiques : x = 4, -1

| x | $-\infty$ | -1 | | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f″(x) | + | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | $\cup$ | -17 | $\cap$ | -512 | $\cup$ |
| | | Inf. | | Inf. | |

f est concave vers le haut sur $]-\infty,-1]\cup[4,\infty[$

f est concave vers le bas sur $[-1,4]$

points d'inflexion : (-1, -17) et (4, -512)

Ex 6. 2: p.224 # 1, 2, 3, 4, 5acegi, 6ace, 7, 8, 9, 10, 11

g) $f(x) = 1 - (x-4)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{-2}{3}(x-4)^{\frac{-1}{3}}(1) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x-4}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}(x-4)^{\frac{-4}{3}}(1) = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-4)^4}}$$

Nombre critique : x = 4

| $x$ | $-\infty$ | 4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | + | $\nexists$ | + |
| $f(x)$ | $\cup$ | 1 | $\cup$ |

f est concave vers le haut sur R

i) $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)}$

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x)(x^2+1)^2 - (-x^2+1)(2(x^2+1)(2x))}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1)\left[x^2+1-2x^2+2\right]}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

Nombres critiques : x = 0, $\pm\sqrt{3}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | | 0 | | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $\cap$ | $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ | $\cup$ | 0 | $\cap$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\cup$ |
| | | Inf. | | Inf. | | Inf. | |

f est concave vers le haut sur $\left[-\sqrt{3},0\right] \cup \left[\sqrt{3},\infty\right[$

f est concave vers le bas sur $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right] \cup \left[0,\sqrt{3}\right]$

points d'inflexion : $\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$ et $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Ex 6. 2: p.224 # 1, 2, 3, 4, 5acegi, 6ace, 7, 8, 9, 10, 11

6. Déterminer les points de maximum relatif et les points de minimum relatif des fonctions suivantes, à l'aide du test de la dérivée seconde ou du test de la dérivée première, lorsque cela est nécessaire.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 5$

Trouvons d'abord les nombres critiques.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1) \rightarrow f''(x) = 6x$

Nous avons un nombre critique quand f'(x)=0, donc x = 1 ou x = -1 sont des nombres critiques.

Évaluons f'' (-1) = -6 < 0, donc (-1, 7) est une maximum relatif de f.

f''(1) = 6 > 0, donc (1, 3) est un minimum relatif de f.

c) $f(x) = 5 - (2-x)^4$

Trouvons d'abord les nombres critiques.

$f'(x) = -4(2-x)^3(-1) = 4(2-x)^3 \rightarrow f''(x) = 12(2-x)^2(-1) = -12(2-x)^2$

Nous avons un nombre critique quand f'(x) = 0, donc x = 2 est un nombre critique.

Évaluons f'' (2) = 0, donc on doit faire le tableau de variation.

| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | + | 0 | – |
| f(x) | ↗ | 5 | ↘ |
| | | Max. | |

Donc, (2, 5) est un maximum relatif.

e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$

Trouvons d'abord les nombres critiques.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1) \rightarrow f''(x) = 36x^2 - 24x$

Nous avons un nombre critique quand f'(x) = 0, donc x = 0 et x = 1 sont des nombres critiques.

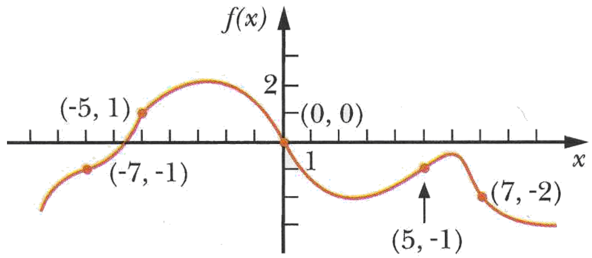
Évaluons f'' (0) = 0, donc on doit faire le tableau de variation.

| x | $-\infty$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | – | 0 | – | 0 | + |
| f(x) | ↘ | 5 | ↘ | 4 | ↗ |
| | | | | Min. | |

Donc, (1, 4) est un minimum relatif.

Ex 6. 2: p.224 # 1, 2, 3, 4, 5acegi, 6ace, 7, 8, 9, 10, 11

7. Connaissant le graphique de f, construire le tableau de variation relatif à la dérivée seconde, sachant que f''(x) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

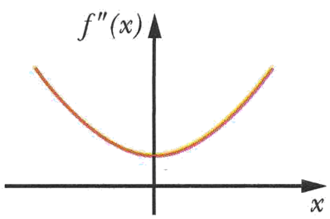



Nombres critiques : x = -7, -5, 0, 5, 7

| x | $-\infty$ | -7 | | -5 | | 0 | | 5 | | 7 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |
| f(x) | ∩ | -1 | ∪ | 1 | ∩ | 0 | ∪ | -1 | ∩ | -2 | ∪ |
| | | Inf. | | Inf. | | Inf. | | Inf. | | Inf. | |

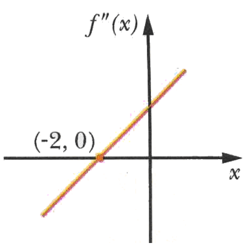
8. Connaissant le graphique de f'', construire le tableau de variation relatif à la dérivée seconde, sachant que f(x) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a)



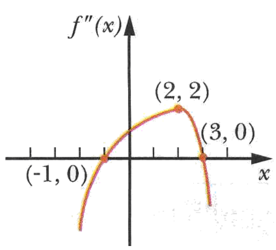

| x | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| f''(x) | + |
| f(x) | ∪ |

b)



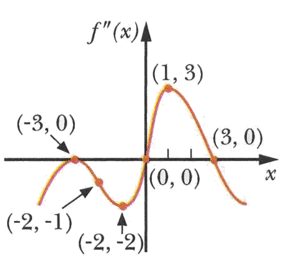

| x | $-\infty$ | -2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f''(x) | – | 0 | + |
| f(x) | ∩ | f(-2) | ∪ |
| | | Inf. | |

c)




| x | $-\infty$ | -1 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ∩ | f(-1) | ∪ | f(3) | ∩ |
| | | Inf. | | Inf. | |

d)

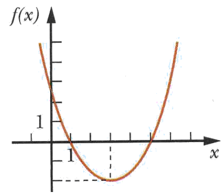



| x | $-\infty$ | -3 | | 0 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | – | 0 | – | 0 | + | 0 | – |
| f(x) | ∩ | f(-3) | ∩ | f(0) | ∪ | f(3) | ∩ |
| | | | | Inf. | | Inf. | |

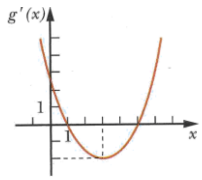
Ex 6. 2: p.224 # 1, 2, 3, 4, 5acegi, 6ace, 7, 8, 9, 10, 11

9. Soit trois fonctions continues f, g et h telles que leurs dérivées première et seconde soient également continues.

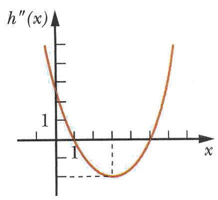
Construire le tableau de variation relatif à la dérivée seconde, à partir des graphiques suivants.

a)



| x | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f''(x) | + | f''(3) | + |
| f(x) | ∪ | -2 | ∪ |

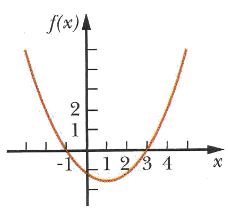
b)


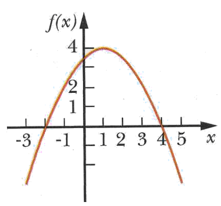

| x | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g''(x) | – | 0 | + |
| g(x) | ∩ | g(3) | ∪ |
| | | Inf. | |

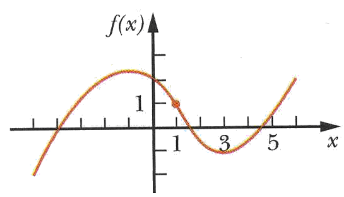
c)


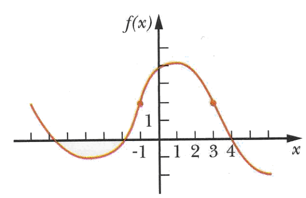

| x | $-\infty$ | -1 | | 5 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| h''(x) | + | 0 | – | 0 | + |
| h(x) | ∪ | h(-1) | ∩ | h(5) | ∪ |
| | | Inf. | | Inf. | |

10. Soit les graphiques de différentes fonctions.

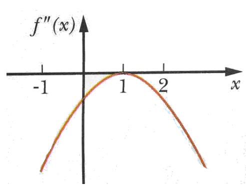
a) 3


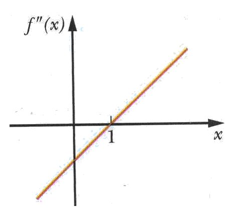

b) 1


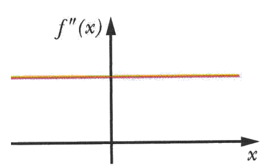

c) 2


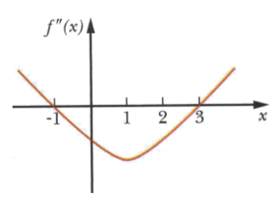

d) 4



Les graphiques suivants représentent les dérivées secondes des fonctions représentées précédemment. Associer à chaque fonction précédente le graphique qui représente, le plus précisément possible, la dérivée seconde de cette fonction.

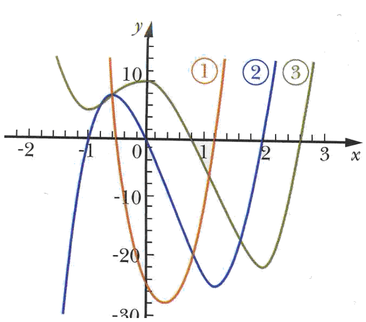
1)



2)


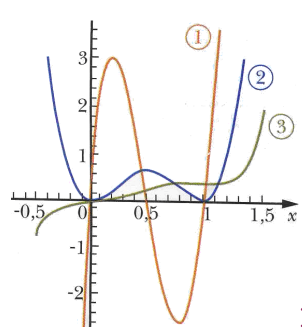

3)



4)



11. Déterminer dans les représentations suivantes la fonction f, la fonction f'' et la fonction g qui n'est pas la dérivée seconde de f.

a)



1 = f'' , 2 = g et 3 =f

b)



1 = f'' , 2 = g et 3 =f