Ex 6. 3: p.233 # 1acegik, 2ac, 3, 4

Ex 6.3: p. 233

1. Pour chacune des fonctions suivantes, construire le tableau de variation relatif à f′ et à f″, donner une esquisse du graphique de la fonction.

a) $f(x) = 4 - x^3$

La fonction f, est polynômiale, donc le domaine est R.

1ère étape : $f'(x) = -3x^2$

Nombres critiques f′(x) = 0, x = 0.

f′(x) non définie, aucun.

2e étape : $f''(x) = -6x$

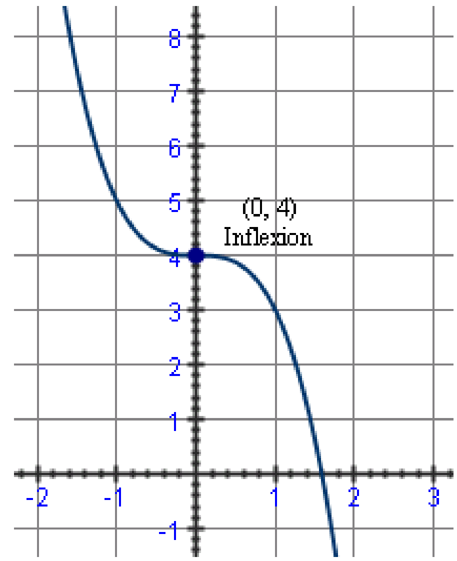
Nombres critiques f″(x) = 0, x = 0

f″(x) non définie, aucun.

3e étape : Tableau de variation

X	$-\infty$	0	$+\infty$
f′(x)	-	0	-
f″(x)	+	0	−
f(x)	↘∪	4	↘∩
E. du G.	↘	(0, 4)	↘
		Inf.	

4e étape : Esquissons le graphique



c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

La fonction f, est polynômiale, donc le domaine est R.

1ère étape : $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

Nombres critiques f′(x) = 0, aucun.

f′(x) non définie, aucun.

2e étape : $f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3)$

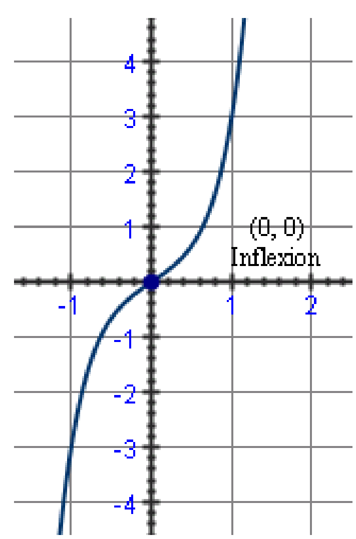
Nombres critiques f″(x) = 0, x = 0

f″(x) non définie, aucun.

3e étape : Tableau de variation

X	$-\infty$	0	$+\infty$
f′(x)	+	+	+
f″(x)	−	0	+
f(x)	↗∩	0	↗∪
E. du G.	↗	(0, 0)	↗
		Inf.	

4e étape : Esquissons le graphique



Ex 6. 3: p.233 # 1acegik, 2ac, 3, 4

e) $f(x)=\sqrt[3]{(x+4)^2}-3$

La fonction f, le domaine est R.

1ère étape : $f'(x)=\dfrac{2}{3}(x+4)^{\frac{-1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+4}}$

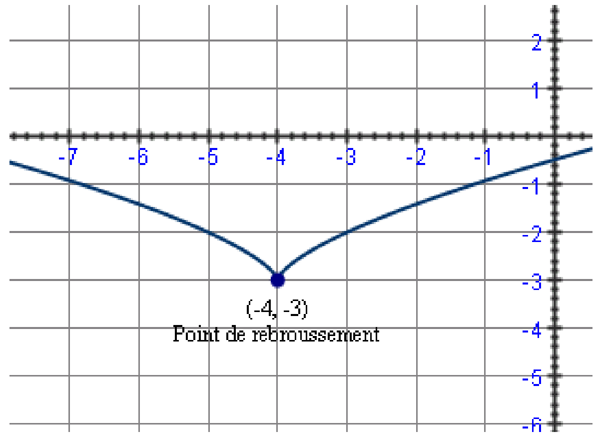
Nombres critiques f'(x) = 0, aucun.

f'(x) non définie, x = -4.

2e étape : $f''(x)=\dfrac{-2}{9}(x+4)^{\frac{-4}{3}}(1)=\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(x+4)^4}}$

Nombres critiques f''(x) = 0, aucun

f''(x) non définie, x = -4.



3e étape : Tableau de variation

X	$-\infty$	-4	$+\infty$
f'(x)	–	∄	+
f''(x)	–	∄	–
f(x)	↘∩	-3	↗∩
E. du G.	➘	(-4, -3)	➚
		Min.	

4e étape : Esquissons le graphique

g) $f(x)=(x-3)^2(x+3)^2$

La fonction f, le domaine est R.

1ère étape : $f'(x)=2(x-3)(1)(x+3)^2+(x-3)^2 2(x+3)(1)$

$f'(x)=2(x-3)(x+3)[x+3+x-3]=4x(x-3)(x+3)$

Nombres critiques f'(x) = 0, x = 0, 3, -3.

f'(x) non définie, aucun.

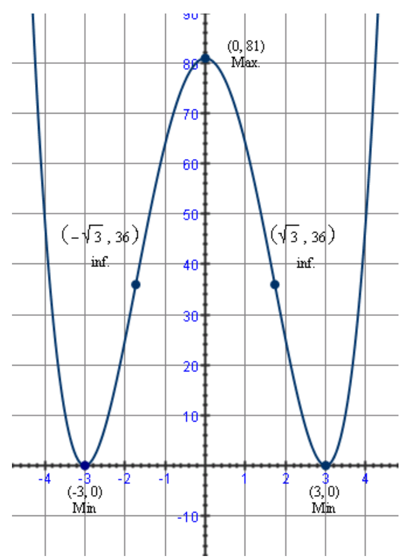
2e étape : $f''(x)=4(x-3)(x+3)+4x(1)(x+3)+4x(x-3)(1)$

$f''(x)=4(x^2-3x+3x-9+x^2+3x+x^2-3x)=4(3x^2-9)$

$f''(x)=12(x^2-3)=12(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Nombres critiques f''(x) = 0, $x=\sqrt{3},-\sqrt{3}$

f''(x) non définie, aucun.



3e étape : Tableau de variation

X	$-\infty$	-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
f''(x)	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
f(x)	↘∪	0	↗∪	36	↗∩	81	↘∩	36	↘∪	0	↗∪
E. du G.	➘	(-3, 0)	➚	$(-\sqrt{3}, 36)$	➚	(0, 81)	➘	$(\sqrt{3}, 36)$	➘	(3, 0)	➚
		Min.		Inf.		Max.		Inf.		Min.	

4e étape : Esquissons le graphique

Ex 6. 3: p.233 # 1acegik, 2ac, 3, 4

i) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

La fonction f, le domaine est R.

1ère étape : $f'(x) = 2 - 2x^{\frac{-1}{3}} = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 2\left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}\right)$

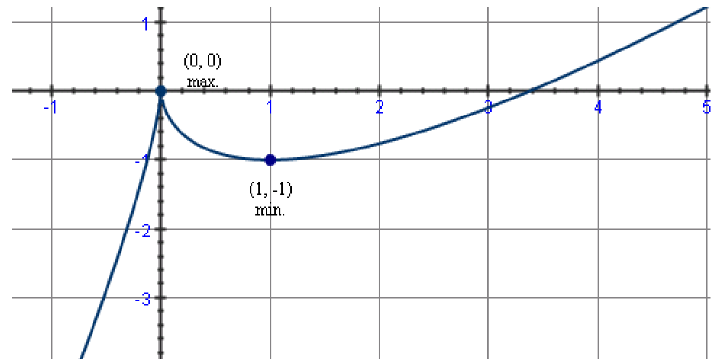
Nombres critiques f'(x) = 0, x = 1.

f'(x) non définie, x = 0.

2^{e} étape : $f''(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-4}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$

Nombres critiques f''(x) = 0, aucun

f''(x) non définie, x = 0.



3^{e} étape : Tableau de variation

X	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f'(x)	+	∄	-	0	+
f''(x)	+	∄	+	+	+
f(x)	↗∪	0	↘∪	-1	↗∪
E. du G.	↗	(0, 0)	↘	(1, -1)	↗
		Max.		Min.	

4^{e} étape : Esquissons le graphique

k) $f(x) = x - 3x^{\frac{1}{3}} + 3$

La fonction f, le domaine est R.

1ère étape : $f'(x) = 1 - x^{\frac{-2}{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}$

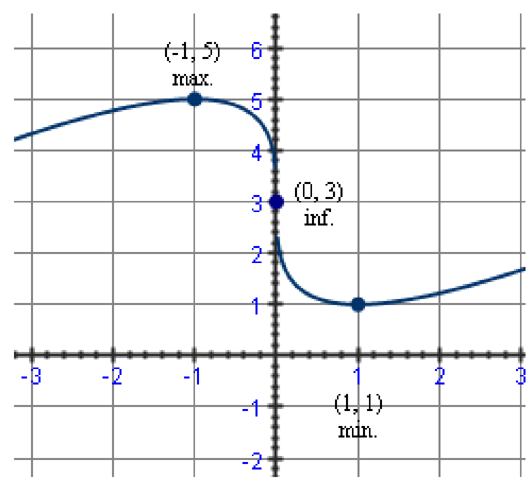
Nombres critiques f'(x) = 0, x = 1, -1.

f'(x) non définie, x = 0.

2^{e} étape : $f''(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-5}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

Nombres critiques f''(x) = 0, aucun

f''(x) non définie, x = 0.



3^{e} étape : Tableau de variation

X	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f'(x)	+	0	–	∄	-	0	+
f''(x)	–	–	–	∄	+	+	+
f(x)	↗∩	5	↘∩	3	↘∪	1	↗∪
E. du G.	↗	(-1, 5)	↘	(0, 3)	↘	(1, 1)	↗
		Max.		Inf.		Min.	

4^{e} étape : Esquissons le graphique

Ex 6. 3: p.233 # 1acegik, 2ac, 3, 4

2. Répondre aux questions du numéro précédent pour chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 12$ sur]-1, 2]

1

1$^{\text{ère}}$ étape : $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$

Nombres critiques f'(x) = 0, x = 1 car -2 ne fait pas parti du do

f'(x) non définie, aucun.

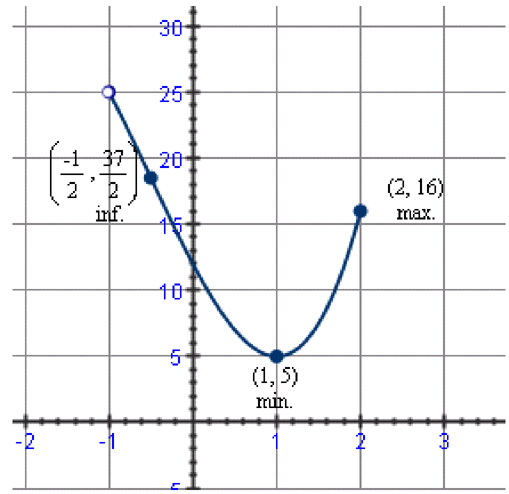
2^{e} étape : $f''(x) = 12x + 6 = 6(2x+1)$

Nombres critiques f''(x) = 0, x = $^{-1}/_{2}$

f''(x) non définie, aucun.

3^{e} étape : Tableau de variation

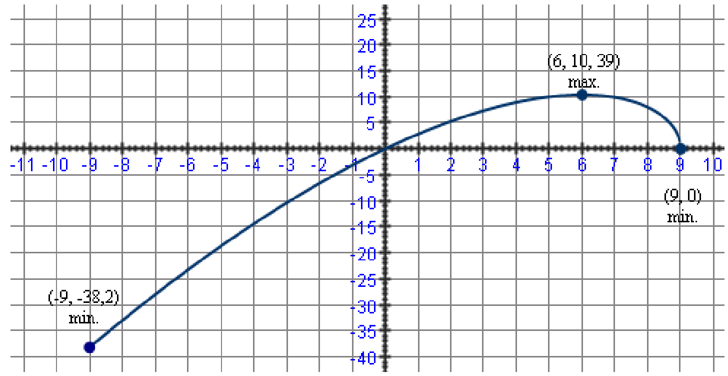
X	-1		$^{-1}/_{2}$		1		2
f'(x)	∄	−	−	−	0	+	∄
f''(x)	∄	−	0	+	+	+	∄
f(x)	∄	↘∩	$^{37}/_{2}$	↘∪	5	↗∪	16
E. du G.	∄	↘	($^{-1}/_{2}$, $^{37}/_{2}$)	↘	(1, 5)	↗	(2, 16)
			Inf.		Min.		Max.



4^{e} étape : Esquissons le graphique

Ex 6. 3: p.233 # 1acegik, 2ac, 3, 4

c) $f(x) = x\sqrt{9-x}$ si $x \geq -9$



domaine [-9, 9]

$$9 - x \geq 0$$
$$9 \geq x$$

1ère étape :

$$f'(x) = (1)\sqrt{9-x} + x\frac{1}{2}(9-x)^{\frac{-1}{2}}(-1) = \frac{2(9-x)-x}{2\sqrt{9-x}}$$

$$f'(x) = \frac{18-2x-x}{2\sqrt{9-x}} = \frac{18-3x}{2\sqrt{9-x}} = \frac{3(6-x)}{2\sqrt{9-x}}$$

Nombres critiques f'(x) = 0, x = 6.

f'(x) non définie, x = 9.

2e étape :

$$f''(x) = \frac{3}{2} \times \frac{-1(9-x)^{\frac{1}{2}} - (6-x)\frac{1}{2}(9-x)^{\frac{-1}{2}}(-1)}{9-x} = \frac{3}{2} \times \frac{-2(9-x)+(6-x)}{2(9-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4} \times \frac{-18+2x+6-x}{(9-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \times \frac{-12+x}{(9-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-3(12-x)}{4(9-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Nombres critiques f''(x) = 0, aucun, car 12 n'est pas dans le domaine

f''(x) non définie, x = 9.

3e étape : Tableau de variation

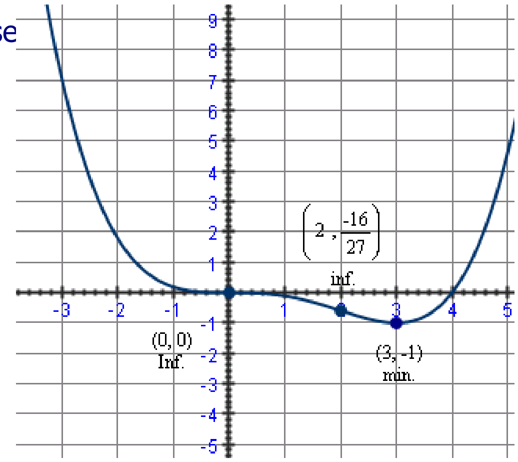
X	-9		6		9
f'(x)	∄	+	0	–	∄
f''(x)	∄	–	–	–	∄
f(x)	-38,2	↗∩	10,39	↘∩	0
E. du G.	(-9, -38,2)		(6, 10,39)		(9, 0)
	Min.		Max.		Min.

4e étape : Esquissons le graphique

Ex 6. 3: p.233 # 1acegik, 2ac, 3, 4

3. Soit $f(x)=\dfrac{x^4-4x^3}{27}$ et $g(x)=\left|\dfrac{x^4-4x^3}{27}\right|$.

a) Construire le tableau de variation relatif à f′ et à f″, donner une esquisse



1ère étape : $f'(x)=\dfrac{4x^3-12x^2}{27}=\dfrac{4x^2(x-3)}{27}$

Nombres critiques f′(x) = 0, x = 0, 3.

f′(x) non définie, aucun.

2e étape : $f''(x)=\dfrac{12x^2-24x}{27}=\dfrac{12x(x-2)}{27}$

Nombres critiques f″(x) = 0, x = 0, 2

f″(x) non définie, aucun.

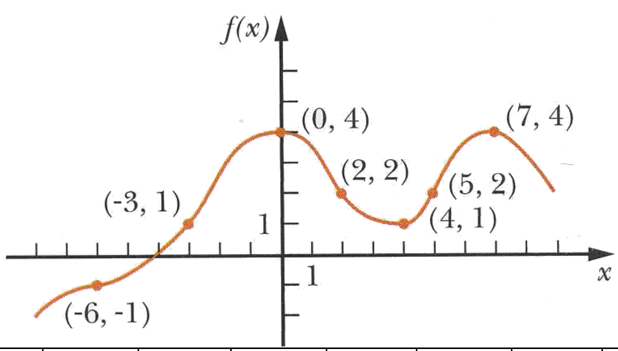
3e étape : Tableau de variation

X	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
f′(x)	−	0	−	−	-	0	+
f″(x)	+	0	−	0	+	+	+
f(x)	↘∪	0	↘∩	$^{-16}/_{27}$	↘∪	-1	↗∪
E. du G.	↘	(0, 0)	↘	(2, $^{-16}/_{27}$)	↘	(3, -1)	↗
		Inf.		Inf.		Min.	

4e étape : Esquissons le graphique

b) Donner une esquisse du graphique de la fonction g.

4. Soit la fonction f, définie par le graphique ci-dessous, telle que f′ et f″ soient continues sur R. Construire le tableau de variation relatif à f′ et à f″.



X	$-\infty$	-6		-3		0		2		4		5		7	$+\infty$
f′(x)	+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
f″(x)	-	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
f(x)	↗∩	-1	↗∪	1	↗∩	4	↘∩	2	↘∪	1	↗∪	2	↗∩	4	↘∩
E. du G.	↗	(-6, -1)	↗	(-3, 1)	↗	(0, 4)	↘	(2, 2)	↘	(4, 1)	↗	(5, 2)	↗	(7, 4)	↘
		Inf.		Inf.		Max.		Inf.		Min.		Inf.		Max.	