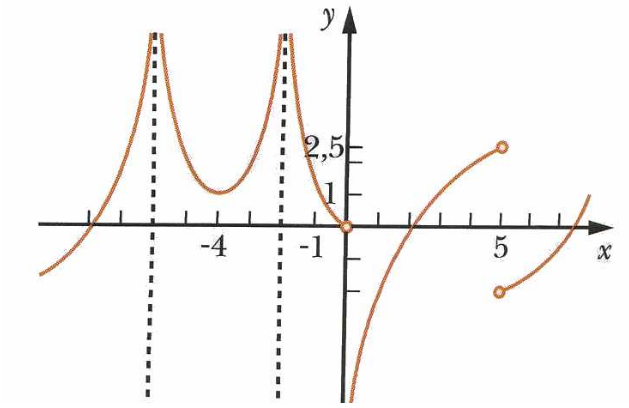
Ex 8,1: p.269 # 1, 2, 3, 4, 5

Ex 8.1 : p. 269

1. Compléter la définition suivante.

La droite d'équation x = a, où a E R, est une asymptote verticale de la courbe de f si une des conditions suivantes est vérifiée : $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$

2. Soit f définie par le graphique ci-contre.



a) évaluer les limites suivantes.

i) $\lim_{x\to -6^-} f(x)$ ii) $\lim_{x\to -6^+} f(x)$ iii) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ iv) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

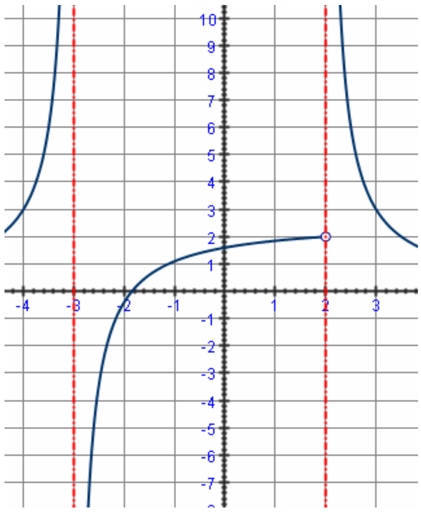
$+\infty$ $+\infty$ $+\infty$ $+\infty$

v) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ vi) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ vii) $\lim_{x\to 5^-} f(x)$ viii) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$

0 $-\infty$ $2{,}5$ -2

b) donner l'équation de chaque asymptote verticale.

$x = -6$, $x = -2$ et $x = 0$



3. a) Tracer un graphique qui répond aux quatre conditions suivantes :

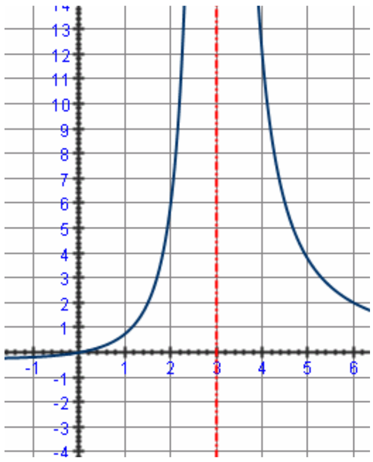
i) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$ ii) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

iii) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ iv) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

b) Donner l'équation de chaque asymptote verticale.

$x = -3$ et $x = 2$

4. Déterminer, si possible, les asymptotes verticales des fonctions suivantes et donner l'esquisse du graphique de la fonction près de ces asymptotes.



a) $f(x) = \dfrac{3x}{(x-3)^2}$

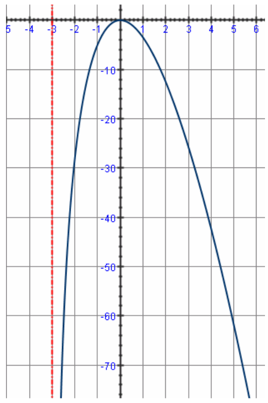
1) Le domaine de cette fonction est $\mathbb{R} \mid \{3\}$

2) Donc, on vérifie la limite à gauche et la limite à droite au point x = 3

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} \frac{3x}{(x-3)(x-3)} &= \frac{9}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{3x}{(x-3)(x-3)} &= \frac{9}{0^+} = +\infty\end{aligned}\right\}$$ donc, x = 3 est une asymptote vert.

Ex 8,1: p.269 # 1, 2, 3, 4, 5

b) $f(x)=\dfrac{-7x^2}{\sqrt{x+3}}$



1) Le domaine de cette fonction est $\left]-3,\infty\right[$

2) Donc, on vérifie la limite à gauche de x = -3

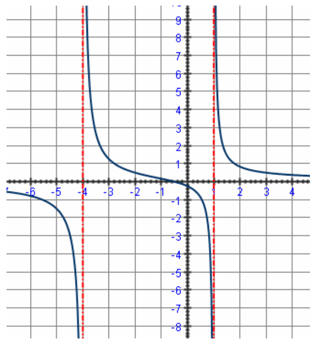
$$\left.\lim_{x\to -3^+}\frac{-7x^2}{\sqrt{x+3}}=\frac{-63}{0^+}=-\infty\right\}$$ donc, x = -3 est une asymptote vert.

c) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+4)}$

1) Le domaine de cette fonction est $R \mid \{-4,1\}$

2) Donc, on vérifie la limite à gauche et à droite de x = -4

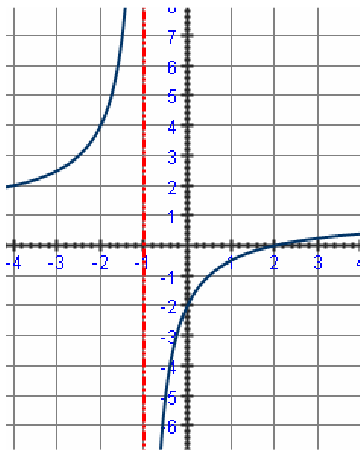
$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to -4^-}\frac{2x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{-7}{0^+}=-\infty\\&\lim_{x\to -4^+}\frac{2x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{-7}{0^-}=+\infty\end{aligned}\right\}$$ donc, x = -4 est une asymptote vert.



x = 1

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{3}{0^-}=-\infty\\&\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{3}{0^+}=+\infty\end{aligned}\right\}$$ donc, x = 1 est une asymptote vert.

d) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}=\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)}$



1) Le domaine de cette fonction est $R \mid \{-3,-1\}$

2) Donc, on vérifie la limite à gauche et à droite de x = -3

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to -3^-}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)}=\lim_{x\to -3^-}\frac{(x-2)}{(x+1)}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}\\&\lim_{x\to -3^+}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)}=\lim_{x\to -3^+}\frac{(x-2)}{(x+1)}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}\end{aligned}\right\}$$ donc, x = -3 n'est pas une asymptote

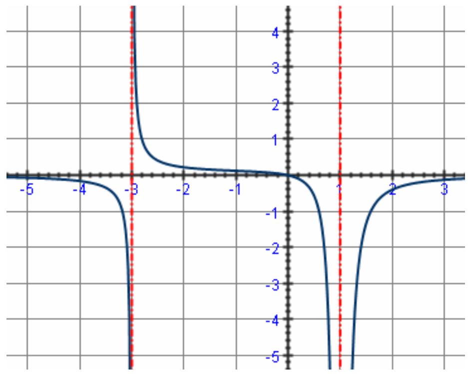
$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)}=\frac{-6}{0^-}=+\infty\\&\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)}=\frac{-6}{0^+}=-\infty\end{aligned}\right\}$$ donc, x = -1 est une asymptote vert.

Ex 8,1: p.269 # 1, 2, 3, 4, 5

e) $f(x)=\dfrac{-x}{(x-1)^2(x+3)}$

1) Le domaine de cette fonction est $R \mid \{-3{,}1\}$

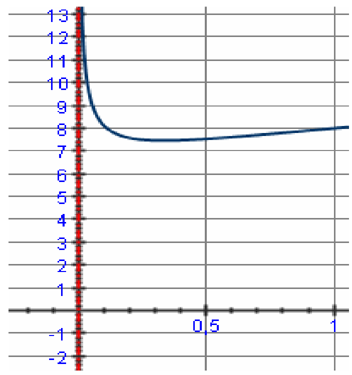
2) Donc, on vérifie la limite à gauche et à droite de x = -3



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{-x}{(x-1)^2(x+3)}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{-x}{(x-1)^2(x+3)}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$$ donc, x = -3 est une asymptote verticale

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x}{(x-1)^2(x+3)}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-x}{(x-1)^2(x+3)}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}$$ donc, x = -1 est une asymptote vert.

f) $f(x)=4+\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

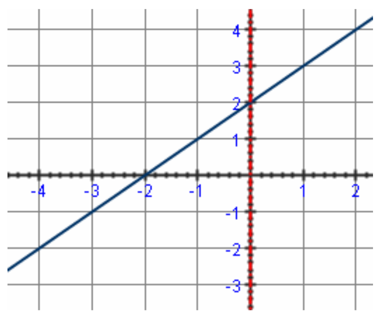


1) Le domaine de cette fonction est $x \rangle 0$

2) Donc, on vérifie la limite à droite de x = 0

$$\left.\lim\limits_{x\to 0^+} 4+\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\right\}$$ donc, x = 0 est une asymptote verticale

g) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$



1) Le domaine de cette fonction est $R \mid \{2\}$

2) Donc, on vérifie la limite à gauche et à droite de x = 2

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4\end{array}\right\}$$ donc, x = 2 n'est pas une asymptote verticale

h) $f(x)=\left(\dfrac{4x}{x(x-1)(x-2)}\right)^2$

1) Le domaine de cette fonction est $R \mid \{0{,}1{,}2\}$

2) Donc, on vérifie la limite à gauche et à droite de x = 0

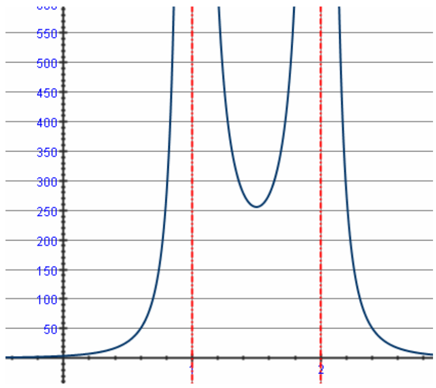
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{4x}{x(x-1)(x-2)}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{4}{(x-1)(x-2)}\right)^2=4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{4x}{x(x-1)(x-2)}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{4}{(x-1)(x-2)}\right)^2=4\end{array}\right\}$$ donc, x = 0 n'est pas une asymptote verticale

Ex 8,1: p.269 # 1, 2, 3, 4, 5

x = 1

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\left(\frac{4x}{x(x-1)(x-2)}\right)^2 &= \lim_{x\to1^-}\left(\frac{4}{(x-1)(x-2)}\right)^2 = \left(\frac{4}{0^+}\right)^2 = +\infty\\ \lim_{x\to1^+}\left(\frac{4x}{x(x-1)(x-2)}\right)^2 &= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{4}{(x-1)(x-2)}\right)^2 = \left(\frac{4}{0^+}\right) = -\infty\end{aligned}\right\}$$

donc, x = 1 est une



x = 2

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to2^-}\left(\frac{4x}{x(x-1)(x-2)}\right)^2 &= \lim_{x\to2^-}\left(\frac{4}{(x-1)(x-2)}\right)^2 = \left(\frac{4}{0^-}\right)^2 = +\infty\\ \lim_{x\to2^+}\left(\frac{4x}{x(x-1)(x-2)}\right)^2 &= \lim_{x\to2^+}\left(\frac{4}{(x-1)(x-2)}\right)^2 = \left(\frac{4}{0^+}\right) = -\infty\end{aligned}\right\}$$

donc, x = 2 est une asymptote verticale

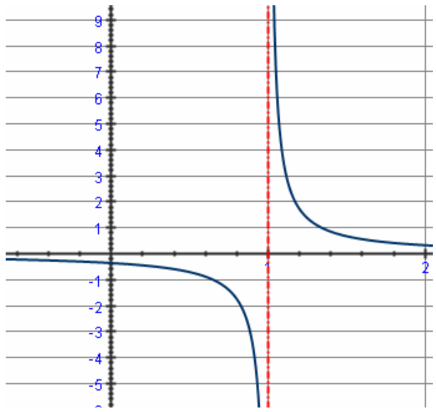
i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{(x+4)(x-1)}$

1) Le domaine de cette fonction est $x > -2 \mid \{1\}$

2) Donc, on vérifie la limite à gauche et à droite de x = 1

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x+2}}{(x+4)(x-1)} &= \frac{1}{0^-} = -\infty\\ \lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x+2}}{(x+4)(x-1)} &= \frac{1}{0^+} = +\infty\end{aligned}\right\}$$

donc, x = 1 est une asymptote verticale



5) Déterminer la valeur de k, telle que :

a) x = -1 soit une asymptote verticale de la courbe définie par $f(x) = \dfrac{5x^2+4}{3x+k}$;

$$3(-1)+k = 0$$
$$k = 3$$

$\displaystyle\lim_{x\to-1^-}\frac{5x^2+4}{3x+3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$, donc x = -1 est une asymptote verticale quand k = 3

b) x = 4 et x = -4 soient des asymptotes verticales de la courbe définie par $f(x) = \dfrac{-5x+7}{(x^2+k)}$.

$$16+k = 0$$
$$k = -16$$

$\displaystyle\lim_{x\to-4^-}\frac{-5x+7}{(x^2-16)} = \frac{27}{0^+} = +\infty$, donc x = -4 est une asymptote verticale quand k = -16

$\displaystyle\lim_{x\to4^-}\frac{-5x+7}{(x^2-16)} = \frac{-13}{0^-} = +\infty$, donc x = 4 est une asymptote verticale quand k = -16