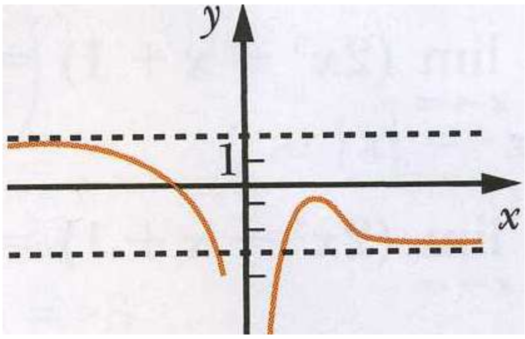
Ex. 8.2 p. 277 # 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Ex 8.2 : p. 277

1. Compléter la définition suivante.

La droite d'équation y = b, où $b \in R$, est une asymptote horizontale de la courbe de f si au moins une des conditions suivantes est vérifiée : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

2. Soit f, définie par le graphique ci-contre.



a) Évaluer les limites suivantes :

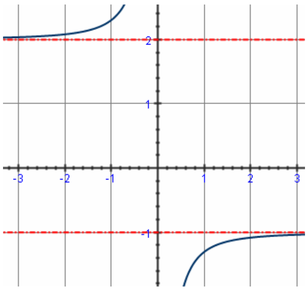
i) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$

b) Donner les équations des asymptotes horizontales.

$y = 2 \quad et \quad y = -3$

3. a) Tracer un graphique qui répond aux deux conditions suivantes :

i) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ ii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$



b) Donner les équations des asymptotes horizontales.

$y = 2 \quad et \quad y = -1$

4. Déterminer si les limites suivantes sont indéterminées. Évaluer ces limites.

a) $\lim_{x \to -\infty} (7x^3 - 4x^2 + 7x - 1) = -\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} (7x^3 - 4x^2 + 7x - 1)$, indétermination de forme $-\infty, +\infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(7 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

c) $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x^3)$, indétermination de forme $-\infty, +\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} + x^3\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(|x|\sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} + x^3\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x\sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} + x^3\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(\frac{-1}{x^2}\sqrt{\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} + 1\right) = -\infty$$

Ex. 8.2 p. 277 # 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

5. Déterminer, si possible, les asymptotes horizontales de chacune des fonctions suivantes, en explicitant les étapes du calcul, lorsque la limite est indéterminée.

a) $f(x) = 7 - \dfrac{3}{x+1}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} 7 - \frac{3}{x+1} = 7 \\ &\lim_{x\to+\infty} 7 - \frac{3}{x+1} = 7 \end{aligned}\right\}$$, donc y = 7 est une asymptote horizontale.

b) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{5x^2+4x+1}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+4x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{5} \\ &\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-1}{5x^2+4x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{5} \end{aligned}\right\}$$, donc y = $^3/_5$ est une asymptote horizontale.

c) $f(x) = \dfrac{4x^3}{7x^2+1}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{7x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{x^2\left(7+\frac{1}{x^2}\right)} = \infty \\ &\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3}{7x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3}{x^2\left(7+\frac{1}{x^2}\right)} = -\infty \end{aligned}\right\}$$, donc il n'y a pas d'asymptote horizontale.

d) $f(x) = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+9}}$

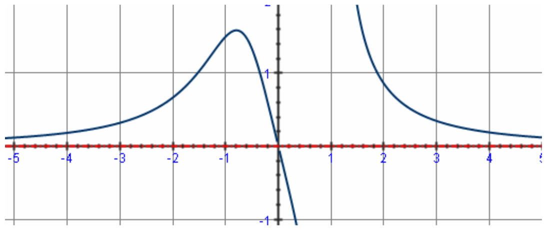
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}} = 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}} = -4$$

donc y = 4 et y = -4 sont des asymptotes horizontales.

Ex. 8.2 p. 277 # 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

6. Déterminer, si possible, les asymptotes horizontales des fonctions suivantes et donner l'esquisse du graphique de la fonction près de ces asymptotes.

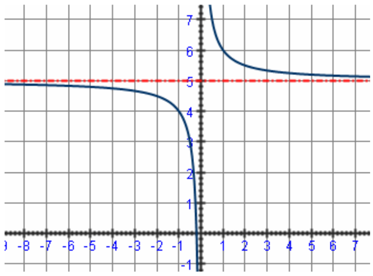


a) $f(x) = \dfrac{-3x^2}{x - x^4}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2}{x-x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(-3)}{x^2\left(\frac{1}{x} - x^2\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{x-x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(-3)}{x^2\left(\frac{1}{x} - x^2\right)} = 0$$

, donc y = 0 est une asymptote horizontale

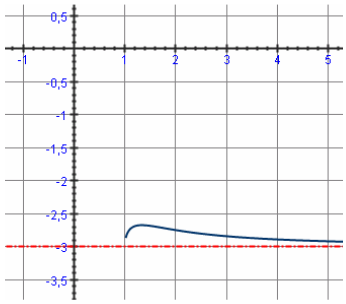


b) $f(x) = 5 + \dfrac{1}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} 5 + \frac{1}{x} = 5$$

$$\lim_{x\to+\infty} 5 + \frac{1}{x} = 5$$

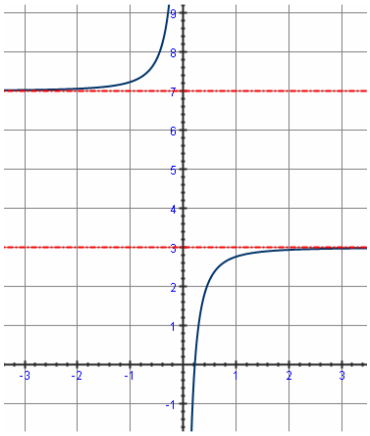
, donc y = 5 est une asymptote horizontale



c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2} - 3$; D = $x \geq 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} - 3 = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}{x^2} - 3 = 0 - 3 = -3$$

, donc y = -3 est une asy



d) $f(x) = 5 - \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} 5 - \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 5 - \frac{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 5 - \frac{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x} = 5 + 2 = 7$$

$$\lim_{x\to+\infty} 5 - \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 - \frac{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 - \frac{x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x} = 5 - 2 = 3$$

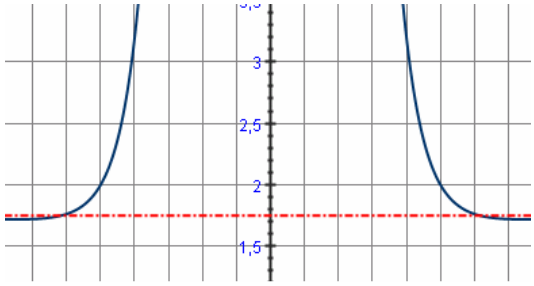
, donc y = 7 et y = 3 sont des asymptotes horizontales

Ex. 8.2 p. 277 # 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

e) $f(x)=\dfrac{7x^8+2x^2+1}{4x^8+x^4}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^8+2x^2+1}{4x^8+x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^8\left(7+\frac{2}{x^6}+\frac{1}{x^8}\right)}{x^8\left(4+\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{7}{4}$$

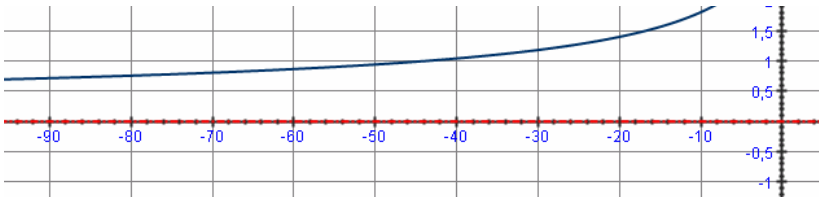
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^8+2x^2+1}{4x^8+x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^8\left(7+\frac{2}{x^6}+\frac{1}{x^8}\right)}{x^8\left(4+\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{7}{4}$$



, donc y = 7/4 est une asymptote horizontale

f) $f(x)=\dfrac{7}{\sqrt{5-x}}$, D= $x\le 5$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{\sqrt{5-x}}=0$$



, donc y = 0 est une asymptote horizontale

g) $f(x)=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+x}{4+x^{\frac{3}{4}}}$, D= $x\ge 0$

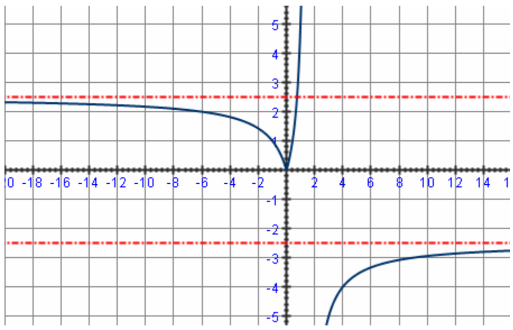
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}+x}{4+x^{\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^{\frac{-1}{3}}+1\right)}{x\left(\frac{4}{x}+x^{\frac{-1}{4}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+1\right)}{\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right)}=\frac{1}{0^+}=\infty$$ Aucune asymptote horizontale

h) $f(x)=\dfrac{|5x|}{3-2x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|5x|}{3-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x\left(\frac{3}{x}-2\right)}=\frac{-5}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|5x|}{3-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x}{x\left(\frac{3}{x}-2\right)}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$

Donc, y = $^{-5}/_2$ et y = $^{5}/_2$



Ex. 8.2 p. 277 # 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

7. Déterminer la valeur de k, où k > 0, telle que :

a) y = 8 soit une asymptote horizontale de $f(x)=\dfrac{kx+1}{3x-4}$, lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{kx+1}{3x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(k+\frac{1}{x}\right)}{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}=\frac{k}{3}$$

$$\frac{k}{3}=8 \to k=24$$

b) y = 7 soit une asymptote horizontale de $f(x)=\dfrac{7x^k+1}{x^2-4}$, lorsque $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^k+1}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^k\left(7+\frac{1}{x^k}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=7x^{k-2}$$

$$7x^{k-2}=7$$

$$x^{k-2}=1 \to k-2=0 \to k=2$$