Ex. 8.4 p.287 # 1, 2aceg

Ex 8.4 : p. 287

1. À l'aide des données suivantes et du tableau de variation ci-dessous :

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to -4^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty\ ;\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\ ;\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = -3\ ;\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$$

x	$-\infty$	-4		-2		-1		0		2		5		6	$+\infty$
F'(x)	-	∄	+	0	-	-	-	0	+	∄	+	0	-	-	-
f''(x)	-	∄	-	-	-	0	+	+	+	∄	-	-	-	0	+
f(x)	↘∩	∄	↗∩	-1	↘∩	-2	↘∪	-3	↗∪	∄	↗∩	6	↘∩	4	↘∪
				(-2, -1)		(-1, -2)		(0, -3)				(5,6)		(6,4)	

a) Déterminer dom f ; $D = R/\{-4,2\}$

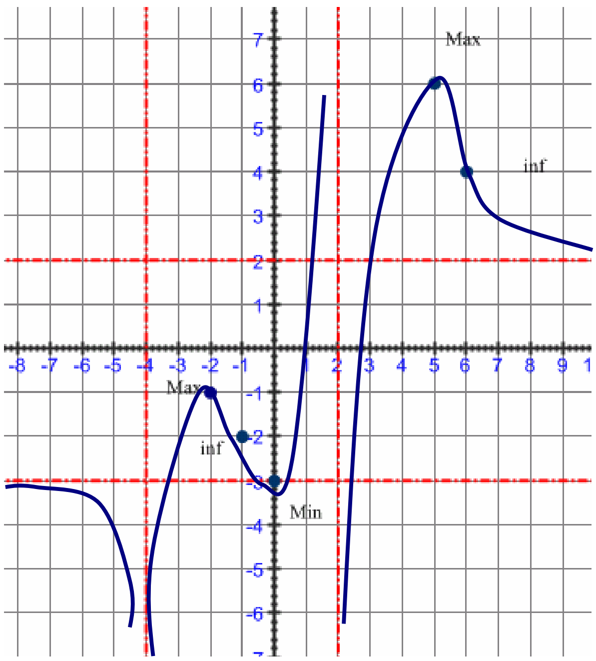
b) Donner les équations des asymptotes verticales ; x = -4 et x = 2

c) Donner les équations des asymptotes horizontales ; y = -3 et y = 2

d) Déterminer les points de maximum relatif et de minimum relatif ; Max (-2, -1), (5, 6), Min (0, -3)

e) Déterminer les points d'inflexion ; Inf (-1, -2) et (6, 4)

f) Esquisser le graphique de cette fonction.



Ex. 8.4 p.287 # 1, 2aceg

2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine et l'équation des asymptotes, construire le tableau de variation relatif à f' et à f'', et donner une esquisse du graphique de la fonction.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

1. Déterminons le domaine : $R\backslash\{-2,2\}$.
2. Déterminons, s'il y a des asymptotes.

verticales.

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

donc x = 2 est une asymptote verticale

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

donc x = -2 est une asymptote verticale

horizontales.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0^-$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0^+$$

, donc y = 0 est une asymptote horizontale

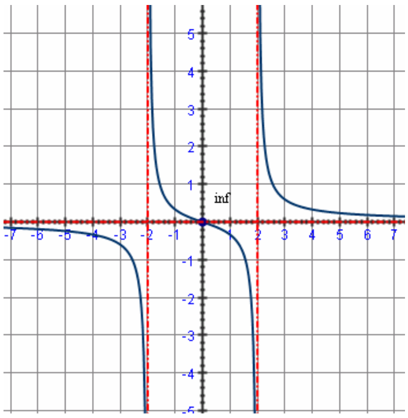
Oblique - parce que la valeur de a serait 0, nous n'avons pas d'asymptotes obliques.

3. Calculons f'(x), et les nombres critiques.

$$f'(x)=\frac{1(x^2-4)-x(2x)}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

Nombres critiques f'(x) = 0, aucun

f'(x) non définie, x = -2, 2, pas défini dans le domaine.



4. Calculons f''(x), et les nombres critiques

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2-4)^2-(-x^2-4)2(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4}=\frac{-2x(x^2-4)\left[x^2-4-2x^2-8\right]}{(x^2-4)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\left[-x^2-12\right]}{(x^2-4)^3}=\frac{2x\left(x^2+12\right)}{(x^2-4)^3}$$

Nombres critiques f''(x) = 0, x = 0

f''(x) non définie, x = -2, 2 n'appartiennent pas au domaine

5. Construisons le tableau de variation

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'(x)		-	∄	-	-	-	∄	-	
f''(x)		-	∄	+	0	-	∄	+	
f	0	↘ ∩	∄	↘ ∪	0	↘ ∩	∄	↘ ∪	0
e. du g.					(0, 0)				
	as. hor.		as. vert.		Inf.		As vert.		as. hor.

Ex. 8.4 p.287 # 1, 2aceg

c) $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

1. Déterminons le domaine : $R\backslash\{0\}$.
2. Déterminons, s'il y a des asymptotes.

verticales.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+4}{x^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+4}{x^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
, donc x = 0 est une asymptote verticale

horizontales.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$
, aucune asymptote horizontale

Oblique

$$\begin{array}{r|l} x^3+4 & x^2 \\ \underline{x^3} & x \\ 4 & \end{array}$$

$$f(x)=x+\frac{4}{x^2}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0$$
, y = x est une asymptote oblique.

3. Calculons f'(x), et les nombres critiques.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2)-(x^3+4)(2x)}{x^4}=\frac{3x^4-2x^4-8x}{x^4}=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-8 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} & x^2+2x+4 \\ 2x^2-8 & \\ \underline{2x^2-4x} & \\ 4x-8 & \end{array}$$

Nombres critiques f'(x) = 0, x = 2

f'(x) non définie, x = 0, pas défini dans le domaine.

4. Calculons f''(x), et les nombres critiques

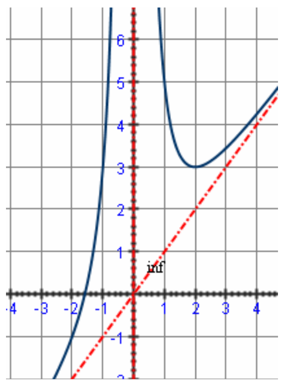
$$f''(x)=\frac{3x^2(x^3)-(x^3-8)3x^2}{x^6}=\frac{3x^5-3x^5+24x^2}{x^6}=\frac{24x^2}{x^6}=\frac{24}{x^4}$$

Nombres critiques f''(x) = 0, aucun

f''(x) non définie, x = 0, n'appartiennent pas au domaine

5. Construisons le tableau de variation

X	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)		+	∄	-	0	+	
f''(x)		+	∄	+	+	+	
f	$-\infty$	↗ ∪	∄	↘ ∪	3	↗ ∪	$+\infty$
e. du g.					(2, 3)		
					Min.		



Ex. 8.4 p.287 # 1, 2aceg

e) $f(x)=(x-2)^2+\dfrac{1}{(x-2)^2}$

1. Déterminons le domaine : $R\backslash\{2\}$.
2. Déterminons, s'il y a des asymptotes.

   verticales.

   $$\lim_{x\to 2^-}(x-2)^2+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$
   $$\lim_{x\to 2^+}(x-2)^2+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$
   , donc x = 2 est une asymptote verticale

   horizontales.

   $$\lim_{x\to -\infty}(x-2)^2+\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$$
   $$\lim_{x\to +\infty}(x-2)^2+\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$$
   , aucune asymptote horizontale

   Oblique : aucune

3. Calculons f'(x), et les nombres critiques.

$$f'(x)=2(x-2)-2(x-2)^{-3}=2(x-2)-\frac{2}{(x-2)^3}=\frac{2(x-2)^4-2}{(x-2)^3}$$

$$\begin{aligned}2(x-2)^4-2&=0\\2(x-2)^4&=2\\(x-2)^4&=1\\x-2&=\pm1\\x=1\quad x&=3\end{aligned}$$

   Nombres critiques f'(x) = 0, x = 1, 3

   f'(x) non définie, x = 2, pas défini dans le domaine.

4. Calculons f''(x), et les nombres critiques

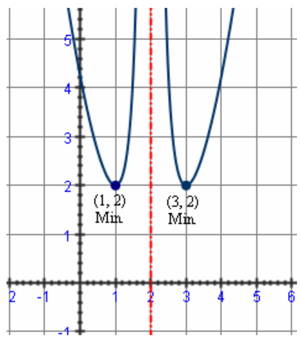
$$f''(x)=\frac{8(x-2)^3(x-2)^3-\left(2(x-2)^4-2\right)3(x-2)^2}{(x-2)^6}=\frac{(x-2)^2\left[8(x-2)^4-6(x-2)^4+6\right]}{(x-2)^6}=\frac{2(x-2)^4+6}{(x-2)^4}$$

   Nombres critiques f''(x) = 0, aucun

   f''(x) non définie, x = 2, n'appartiennent pas au domaine

5. Construisons le tableau de variation

X	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	∄	-	0	+	
f''(x)		+	+	+	∄	+	+	+	
f	$+\infty$	↘∪	2	↗∪	∄	↘∪	2	↗∪	$+\infty$
e. du g.		↘	(1, 2)	↗		↘	(3, 2)	↗	
			Min.				Min.		



Ex. 8.4 p.287 # 1, 2aceg

g) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$

1. Déterminons le domaine : $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
2. Déterminons, s'il y a des asymptotes.

verticales.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$
, donc x = 0 est une asymptote verticale

horizontales.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3+1}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(x^2+\frac{1}{x}\right)}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3+1}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(x^2+\frac{1}{x}\right)}{x}=+\infty$$
, aucune asymptote horizontale

Oblique : aucune

3. Calculons f'(x), et les nombres critiques.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x)-(x^3+1)(1)}{x^2}=\frac{3x^3-x^3-1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$$

$$2x^3-1=0$$
$$2x^3=1$$
$$x^3=\frac{1}{2}$$
$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Nombres critiques f'(x) = 0, $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

f'(x) non définie, x = 0, pas défini dans le domaine.

4. Calculons f''(x), et les nombres critiques

$$f''(x)=\frac{6x^2(x^2)-(2x^3-1)2x}{x^4}=\frac{6x^4-4x^4+2x}{x^4}=\frac{2x^4+2x}{x^4}=\frac{2(x^3+1)}{x^3}$$

$$x^3+1=0$$
$$x^3=-1$$
$$x=-1$$

Nombres critiques f''(x) = 0, x = -1

f''(x) non définie, x = 0, n'appartiennent pas au domaine

5. Construisons le tableau de variation

X	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f'(x)		-	-	-	∄	-	0	+	
f''(x)		+	0	-	∄	+	0	+	
f	$-\infty$	↘ ∪	0	↘ ∩	∄	↘ ∪	1,89	↗ ∪	$+\infty$
e. du g.		↘	(-1, 0)	↘		↘	(0.83, 1,89)	↗	
			Inf.				Min.