Exercices récapitulatifs p. 237 # 1ac, 2aceg, 3, 5ac, 9, 13

Exercices récapitulatifs p. 291 # 1, 2, 3ae, 4ac

Exercices récapitulatifs p. 237

1. Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance des fonctions suivantes.

a) $f(x)=12x^3-24x^2+12x$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
f'(x)	+	0	–	0	+
f(x)	↗	$\frac{16}{9}$	↘	0	↗
		Max.		Min.	

$f'(x)=36x^2-48x+12=12(3x^2-4x+1)=12(3x^2-3x-x+1)$

$f'(x)=12(3x(x-1)-1(x-1))=12(x-1)(3x-1)$

$f'(x)=0, x=1,\frac{1}{3}$

$f'(x)=\exists$, aucun

↗ sur $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty[$; ↘ sur $\left[\frac{1}{3},1\right]$

c) $f(x)=80x-x^5+7$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
f'(x)	–	0	+	0	–
f(x)	↘	-121	↗	135	↘
		Min.		Max.	

$f'(x)=80-5x^4$

$f'(x)=0, x=\pm 2$

$f'(x)=\exists$, aucun

$5x^4=80$

$(x^4)^{\frac{1}{4}}=16^{\frac{1}{4}}=\pm 2$

↗ sur $[-2,2]$; ↘ sur $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

2. Déterminer, si possible, les points de maximum relatif et les points de minimum relatif des fonctions suivantes. (Préciser s'il s'agit d'un point de maximum absolu ou d'un point de minimum absolu.)

a) $f(x)=x^6-3x^2+5$

$f'(x)=6x^5-6x=6x(x^4-1)=6x(x^2-1)(x^2+1)=6x(x-1)(x+1)(x^2+1)$

$f'(x)=0, x=0,-1,1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘	3	↗	5	↘	3	↗
		Min		Max.		Min	

(-1, 3) min. abs. (1, 3) min. abs. (0,5) max. rel.

c) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2x^3-2x^2+2x+x^2-x+1-2x^3-2x^2-2x+x^2+x+1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x)=0, x=\pm 1; f'(x)=\exists$, aucun

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'(x)	–	0	+	0	–
f(x)	↘	$^1/_3$	↗	3	↘
		Min.		Max.	

max. rel. ((1, 3), min. rel. (-1, $^1/_3$)

Exercices récapitulatifs p. 237 # 1ac, 2aceg, 3, 5ac, 9, 13

Exercices récapitulatifs p. 291 # 1, 2, 3ae, 4ac

e) $f(x) = 4 + 2\sqrt[3]{5-x}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5-x)^{\frac{-2}{3}}(-1) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(5-x)^2}}$$

$$f'(x) = 0, \text{aucun}; f'(x) = \exists, x = 5$$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f′(x)	–	∄	–
f(x)	↘	4	↘

max. aucun, min. aucun

g) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x} + \frac{3}{2}$ sur [1,5[

$$f'(x) = 2x - 16x^{-2} = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$$

$$f'(x) = 0, x = 2; f'(x) = \exists, x = 0$$

$$2x^3 = 16$$

$$(x^3)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$$

x	1		2		5
f′(x)		–	0	+	
f(x)	18,5	↘	13,5	↗	∄

Min. abs. (2, 13,5), max. rel. (1, 18,5)

3. Soit f, une fonction continue sur R telle que $f'(x) = x^2(x-1)^4(3x^2+7)$. Expliquer pourquoi la fonction f ne peut avoir ni maximum ni minimum.

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f′(x)	+	0	+	0	+
f(x)	↗	f(0)	↗	f(1)	↗

Car, elle est toujours croissante.

5. Déterminer les intervalles de concavité vers le haut, les intervalles de concavité vers le bas et, si possible, les points d'inflexion de la courbe de f dans le cas suivants.

a) $f(x) = (1-4x)^3$

$$f'(x) = 3(1-4x)^2(-4) = -12(1-4x)^2$$

$$f''(x) = -24(1-4x)(-4) = 96(1-4x)$$

$$f''(x) = 0, x = \frac{1}{4}; f'(x) = \exists, \text{aucun}$$

x	$-\infty$	$^1/_4$	$+\infty$
f″(x)	+	0	-
f(x)	∪	0	∩
		Inf.	

$$\cup \text{ sur } \left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$$

$$\cap \text{ sur} \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$$

$$\text{Inf.}\left(\frac{1}{4}, 0\right)$$

Exercices récapitulatifs p. 237 # 1ac, 2aceg, 3, 5ac, 9, 13

Exercices récapitulatifs p. 291 # 1, 2, 3ae, 4ac

c) $f(x) = 8x - 3(2-x)^{\frac{5}{3}}$

$$f'(x) = 8 - 5(2-x)^{\frac{2}{3}}(-1) = 8 + 5(2-x)^{\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{3}(2-x)^{\frac{-1}{3}}(-1) = \frac{-10}{3\sqrt[3]{2-x}}$$

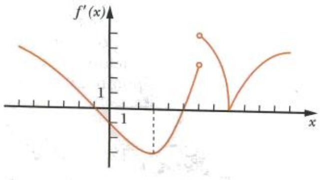
$$f''(x) = 0, \text{aucun}; f'(x) = \nexists, x = 2$$

$\cup$ sur $[2, \infty[$

$\cap$ sur $]-\infty, 2]$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f″(x)	-	$\nexists$	+
f(x)	$\cap$	16	$\cup$

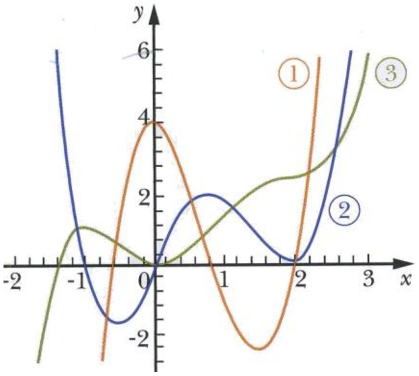
9. Soit f, une fonction continue sur R, dont la représentation de f′ est donnée par le graphique ci-dessous.



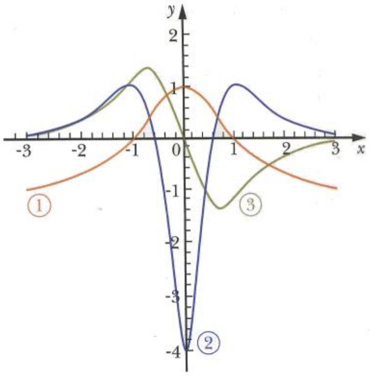
Construire le tableau de variation relatif à f′ et à f″.

x	$-\infty$		-1		3		5		6		8		$+\infty$
f′(x)		+	0	-	-	-	0	+	$\nexists$	+	0	+	
f″(x)		-	-	-	0	+	+	+	$\nexists$	-	$\nexists$	+	
f		↗ $\cap$	F(-1)	↘ $\cap$	F(3)	↘ $\cup$		↗ $\cup$	F(6)	↗ $\cap$	0	↗ $\cup$	
		⤴		⤵		⤷		⤴		⤴		⤴	
			Max.		Inf.		Min.		Inf.		Inf.		

13. Déterminer dans les représentations suivantes la fonction f, la fonction f′ et la fonction f″.



a)



b)

f = 3, f′ = 2, f″ = 1

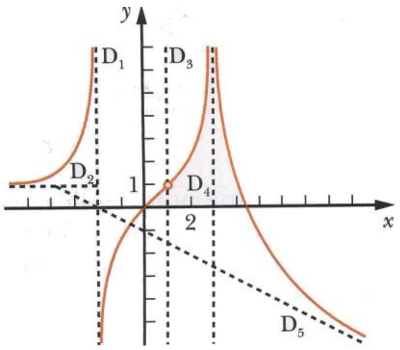
f = 1 , f′ = 3, f″ = 2

Exercices récapitulatifs p. 237 # 1ac, 2aceg, 3, 5ac, 9, 13

Exercices récapitulatifs p. 291 # 1, 2, 3ae, 4ac

Exercices récapitulatifs p. 291

1. a) Parmi les droites ci-dessous, repérer les droites qui sont des asymptotes verticales, horizontales ou obliques et donner leur équation.



D_1 = asymptote verticale, $x = -2$
D_2 = asymptote horizontale; $y = 1$
D_3 = asymptote verticale, $x = 1$
D_4 = asymptote verticale, $x = 3$
D_5 = asymptote oblique, $y = {}^{-1}/_{2}x - 1$
Passe par (-2, 0) et (0, -1) donc $m = {}^{-1}/_{2}$

b) À l'aide du graphique précédent, évaluer les limites suivantes.

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ ii) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

iv) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ v) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ vi) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = {}^{-1}/_{2}$

2. Répondre par vrai (V) ou faux (F).

a) si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, alors x = 1 est une asymptote verticale. V

b) si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 7$, alors y = 7 est une asymptote horizontale. V

c) si $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = -\infty$, alors x = 7 est une asymptote horizontale. F

d) si $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 5$, alors y = 5 est une asymptote horizontale. F

e) si $f(x) = 3x - 4 + \frac{1}{x}$, alors y = 3x -4 est une asymptote oblique. V

f) si $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ est une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$, alors x = 2 est une asymptote verticale. F

g) Une fonction peut avoir quatre asymptotes verticales. V

h) Une fonction peut avoir trois asymptotes obliques. F

i) Une fonction peut avoir deux asymptotes horizontales. V

j) si $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{f(x)} = 0$. V

k) si $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. F

l) Si $f(x) = 5 - 2x + \frac{x}{x+1}$, alors y = 5 - 2x est une asymptote oblique. F

Exercices récapitulatifs p. 237 # 1ac, 2aceg, 3, 5ac, 9, 13

Exercices récapitulatifs p. 291 # 1, 2, 3ae, 4ac

3. Déterminer, s'il y a lieu, les asymptotes verticales, horizontales et obliques des fonctions suivantes. (vérifier la pertinence des résultats à l'aide d'un outil technologique.)

a) $y=\dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$, $D=R/\{-2,2\}$

verticales.

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{3x^2+1}{x^2-4}=\frac{13}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{3x^2+1}{x^2-4}=\frac{13}{0^+}=+\infty$$

donc x = -2 est une asymptote verticale

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2+1}{x^2-4}=\frac{13}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^2+1}{x^2-4}=\frac{13}{0^+}=+\infty$$

donc x = 2 est une asymptote verticale

horizontales.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-4}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=3$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=3$$

, donc y = 3 est une asymptote horizontale

Oblique –

$$\begin{array}{r} 3 \\ x^2-4\overline{)3x^2+1} \\ \underline{3x^2} \\ 1 \end{array}$$

$3+\dfrac{1}{x^2-4}$, la valeur de a serait 0, donc aucune

e) $y=\dfrac{4x^2-1}{x+1}$ $D=R/\{-1\}$

verticales.,

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{4x^2-1}{x+1}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{4x^2-1}{x+1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

donc x = -1 est une asymptote verticale

horizontales.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2-1}{x+1}=\frac{x\left(4x-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=-\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2-1}{x+1}=\frac{x\left(4x-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=+\infty$$

, donc aucune asymptote horizontale

Oblique –

$$\begin{array}{r} 4x-4 \\ x+1\overline{)4x^2-1} \\ \underline{4x^2+4x} \\ -4x-1 \\ \underline{-4x-4} \\ 3 \end{array}$$

$4x-4+\dfrac{3}{x+1}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+1}=0$, alors y = 4x-4 est une asymptote oblique

Exercices récapitulatifs p. 237 # 1ac, 2aceg, 3, 5ac, 9, 13

Exercices récapitulatifs p. 291 # 1, 2, 3ae, 4ac

4. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points de maximums relatif, de minimum relatif, d'inflexion, les équations des asymptotes, et donner une esquisse du graphique de la fonction.

a) $y = \dfrac{3x+1}{2-x}$

1. Déterminons le domaine : $R \backslash \{2\}$.
2. Déterminons, s'il y a des asymptotes.

verticales.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x+1}{(2-x)} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x+1}{(2-x)} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

donc x = 2 est une asymptote verticale

Oblique –

$$\begin{array}{r} -3 \\ -x+2\overline{)3x+1} \\ \underline{3x-6} \\ 7 \end{array}$$

parce que la valeur de a serait 0, nous n'avons pas d'asymptotes obliques.

horizontales.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x+1}{2-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)} = -3$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x+1}{2-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)} = -3$$

, donc y = -3 est une asymptote horizontale

3. Calculons f'(x), et les nombres critiques.

$$f'(x) = \frac{3(2-x)-(3x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{6-3x+3x+1}{(2-x)^2} = \frac{7}{(2-x)^2}$$

Nombres critiques f'(x) = 0, aucun

f'(x) non définie, x = 2, pas défini dans le domaine.

4. Calculons f''(x), et les nombres critiques

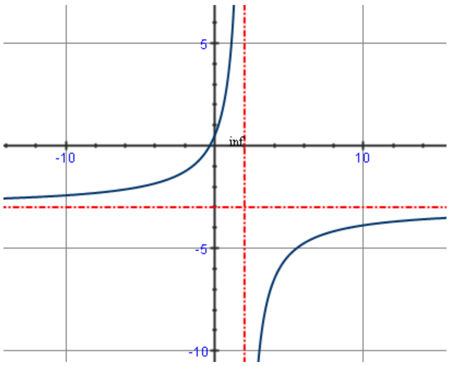
$$f''(x) = \frac{0(2-x)^2 - 7(2(2-x)(-1))}{(2-x)^4} = \frac{14(2-x)}{(2-x)^4} = \frac{14}{(2-x)^3}$$

Nombres critiques f''(x) = 0, aucun

f''(x) non définie, x = 2, n'appartient pas au domaine

5. Construisons le tableau de variation

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'(x)		+	∄	+	
f''(x)		+	∄	-	
f	-3	↗ ∪	∄	↗ ∩	-3
e. du g.		⤴		↱	
	as. hor.		As vert.		as. hor.



Exercices récapitulatifs p. 237 # 1ac, 2aceg, 3, 5ac, 9, 13

Exercices récapitulatifs p. 291 # 1, 2, 3ae, 4ac

c) $y=\sqrt{8-x^3}=\sqrt{(-x+2)(x^2+2x+4)}$

1. Déterminons le domaine : R/ $x\leq 2$.

donc

$$-x+2\geq 0$$
$$-x\geq -2$$
$$x\leq 2$$

2. Déterminons, s'il y a des asymptotes.

verticales.

$$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{8-x^3}=0$$

donc aucune asymptote verticale

horizontales.

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{8-x^3}=\infty$$

donc aucune asymptote horizontale

Oblique –

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{8-x^3}}{x}=\frac{|x|\sqrt{\frac{8}{x^2}-x}}{x}=\frac{-x\sqrt{\frac{8}{x^2}-x}}{x}=\infty$$

Aucune asymptote oblique

3. Calculons f'(x), et les nombres critiques.

$$f'(x)=\frac{1}{2}(8-x^3)^{\frac{-1}{2}}(-3x^2)=\frac{-3x^2}{2(8-x^3)^{\frac{1}{2}}}$$

Nombres critiques f'(x) = 0, x = 0

f'(x) non définie, x = 2.

4. Calculons f''(x), et les nombres critiques

$$f''(x)=\frac{-6x(2\sqrt{8-x^3})-(-3x^2)(8-x^3)^{\frac{-1}{2}}(-3x^2)}{4(8-x^3)}=\frac{-12x\sqrt{8-x^3}-\frac{9x^4}{\sqrt{8-x^3}}}{4(8-x^3)}=\frac{\frac{-12x(8-x^3)-9x^4}{\sqrt{8-x^3}}}{4(8-x^3)}$$

$$f''(x)=\frac{-96x+12x^4-9x^4}{\sqrt{8-x^3}}\times\frac{1}{4\sqrt{8-x^3}}=\frac{-96x+3x^4}{4\sqrt{(8-x^3)^3}}=\frac{3x(x^3-32)}{4\sqrt{(8-x^3)^3}}$$

Nombres critiques f''(x) = 0, x = 0, 3,17 (pas dans le domaine)

f''(x) non définie, x = 2

5. Construisons le tableau de variation

x	$-\infty$		0		2
f'(x)		-	0	-	∄
f''(x)		+	0	-	∄
f		↘ ∪	$\sqrt{8}$	↘ ∩	0
e. du g.		⇘	Inf.	⇘	Min.