3.8 Les équations logarithmiques

1. Explique pourquoi l'ensemble-solution des deux équations logarithmiques suivantes est différent malgré le fait qu'elles soient apparentées.

i) $2\ln x = 4$

$D =]0, \infty[$

ii) $\ln x^2 = 4$

$D =]-\infty, \infty[$

2. Résous.

a) $2 \times 3^x = 6^{x-2}$

$$\log\left(2 \times 3^x\right) = \log\left(6^{x-2}\right)$$
$$\log 2 + x\log 3 = (x-2)\log 6$$
$$\log 2 + x\log 3 = x\log 6 - 2\log 6$$
$$x\log 3 - x\log 6 = -2\log 6 - \log 2$$
$$x\left(\log 3 - \log 6\right) = -2\log 6 - \log 2$$
$$x = \frac{-2\log 6 - \log 2}{\log 3 - \log 6}$$
$$x = \frac{2\log 6 + \log 2}{\log 6 - \log 3}$$

b) $\log(x-4) + \log(x+1) = \log(x+8)$

$$\log(x-4)(x+1) = \log(x+8)$$
$$x^2 + x - 4x - 4 = x + 8$$
$$x^2 - 4x - 12 = 0$$
$$(x-6)(x+2) = 0$$
$$x = 6 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

à rejeter

3. La relation $t = \frac{1}{c}\ln\left(\frac{A}{A-N}\right)$ modélise le temps t, en semaines, requis pour effectuer la portion d'une tâche. La variable A représente la valeur maximale possible, la variable N représente l'objectif visé et c est une constante propre à chaque situation. Un homme de 50 ans décide de commencer à courir pour garder la forme. Il estime que la vitesse maximale à laquelle il pourra courir sera de 15 km/h. Dans sa situation, $c = 0{,}06$. À quelle vitesse pourra-t-il courir après 8 semaines?

$A = 15\text{km}/\text{h}$
$c = 0{,}06$
$t = 8$ semaines
$N = ?$

$$8 = \frac{1}{0{,}06}\ln\left(\frac{15}{15-N}\right)$$
$$0{,}48 = \ln\left(\frac{15}{15-N}\right)$$
$$e^{0{,}48} = \frac{15}{15-N}$$
$$1{,}616(15-N) = 15$$
$$-1{,}616N = 15 - 24{,}24$$
$$N = 5{,}72\text{km}/\text{h}$$

3.8 Les inéquations racines carrées et rationnelles

1. Résous.

a) $\dfrac{1}{4(x+2)} > \dfrac{3}{x-2}$

$$\frac{1}{4(x+2)} - \frac{3}{x-2} > 0$$
$$\frac{1(x-2) - 3(4(x+2))}{4(x+2)(x-2)} > 0$$
$$\frac{x-2-12x-24}{4(x+2)(x-2)} > 0$$
$$\frac{-11x-26}{4(x+2)(x-2)} > 0$$

	$-\infty$	$\frac{-26}{11}$		-2		2	$-\infty$	
$-11x-26$	+	0	-	-	-	-	-	
$4(x+2)$	-	-	-	0	+	+	+	Solution $\left]-\infty, \frac{-26}{11}\right[\cup \left]-2,2\right[$
$(x-2)$	-	-	-	-	-	0	+	
$\dfrac{-11x-26}{4(x+2)(x-2)}$	+	0	-	$\nexists$	+	$\nexists$	-	

b) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} \leq 5$

$D = x \geq 3 \;\; et \;\; x \geq -2$

$D = \left[3, \infty\right[$

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x+2}\right)^2$$
$$x - 3 = 25 - 10\sqrt{x+2} + x + 2$$
$$10\sqrt{x+2} = 30$$
$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = (3)^2$$
$$x + 2 = 9$$
$$x = 7$$

$$x = 7$$
$$\sqrt{7-3} + \sqrt{7+2} \leq 5$$
$$2 + 3 \leq 5$$
$$5 \leq 5$$

$$si \;\; x = 4$$
$$\sqrt{4-3} + \sqrt{4+2} \leq 5$$
$$3,449 \leq 5$$
$$si \;\; x = 8$$
$$\sqrt{8-3} + \sqrt{8+2} \leq 5$$
$$5,4 \not\leq 5$$

$[3,7]$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{1}{2-x} < 0$

$D = x > 2$

$D = \left]2, \infty\right[$

$\dfrac{-\sqrt{x-2}+1}{-(x-2)} < 0$

$\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{(x-2)} < 0$

$\sqrt{x-2} - 1 = 0$

$\sqrt{x-2} = 1$

$x - 2 = 1$

$x = 3$

Vérification

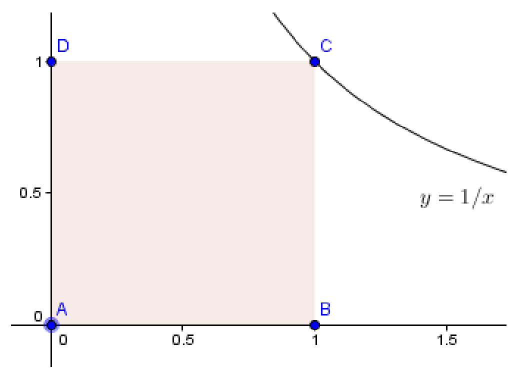
$\sqrt{3-2} - 1 = 0$

$1 - 1 = 0$

$0 = 0$

	$-\infty$	2		3	$+\infty$	
$\sqrt{x-2}-1$	$\nexists$	$-$	$-$	0	$+$	Solution
$x+2$	$\nexists$	0	$+$	$+$	$+$	$\left]2,3\right[$
$\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{(x-2)}$	$\nexists$	$\nexists$	$-$	0	$+$	

2. On construit un rectangle en prenant comme sommets opposés l'origine, un point du premier quadrant appartenant à la courbe $y = \dfrac{1}{x}$. Dans la figure suivante, on présente un exemple de rectangle. Quelles longueurs peuvent prendre le segment AB afin que le périmètre du rectangle soit inférieur à 5?



$2x + 2y < 5$ et $y = \dfrac{1}{x}$

$2x + 2\left(\dfrac{1}{x}\right) < 5$

$\dfrac{2x^2 + 2 - 5x}{x} < 0$

$\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x} < 0$

$\dfrac{(2x-4)(2x-1)/2}{x} < 0$

$\dfrac{2(x-2)(2x-1)/2}{x} < 0$

$\dfrac{(x-2)(2x-1)}{x} < 0$

	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$	
$x - 2$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$2x - 1$	$\nexists$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	Solution
x	$\nexists$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\left]\frac{1}{2}, 2\right[$
$\dfrac{(x-2)(2x-1)}{x}$	$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	

3.4 Les identités trigonométriques

1. Simplifie

a) $\dfrac{\tan x + \sin x}{\cos x + 1}$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x}{\cos x + 1}$$
$$= \frac{\sin x + \cos x \sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x + 1}$$
$$= \frac{\sin x\left(\cos x + 1\right)}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x + 1} = \tan x$$

b) $\left(3\cos x - 4\sin x\right)^2 + \left(4\cos x + 3\sin x\right)^2$

$$= 9\cos^2 x - 24\cos x \sin x + 16\sin^2 x + 16\cos^2 x + 24\cos x \sin x + 9\sin^2 x$$
$$= 25\cos^2 x + 25\sin^2 x$$
$$= 25\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 25$$

2. Démontre les identités trigonométriques suivantes.

a) $\dfrac{\sin x}{\cos x + 1} + \dfrac{\cos x - 1}{\sin x} = 0$

$$\frac{\sin x \sin x + \left(\cos x - 1\right)\left(\cos x + 1\right)}{\left(\cos x + 1\right)\sin x} = 0$$
$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x - \cos x - 1}{\left(\cos x + 1\right)\sin x} = 0$$
$$\frac{1 - 1}{\left(\cos x + 1\right)\sin x} = 0$$
$$0 = 0$$

b) $\dfrac{1}{\tan x + \sec x} + \dfrac{1}{\tan x - \sec x} = -2\tan x$

$$\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}} + \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}} = -2\tan x$$

$$\frac{1}{\frac{\sin x + 1}{\cos x}} + \frac{1}{\frac{\sin x - 1}{\cos x}} = -2\tan x$$

$$\frac{\cos x}{\sin x + 1} + \frac{\cos x}{\sin x - 1} = -2\tan x$$

$$\frac{\cos x\left(\sin x - 1\right) + \cos x\left(\sin x + 1\right)}{\left(\sin x + 1\right)\left(\sin x - 1\right)} = -2\tan x$$

$$\frac{\cos x \sin x - \cos x + \cos x \sin x + \cos x}{\sin^2 x - \sin x + \sin x - 1} = -2\tan x$$

$$\frac{2\cos x \sin x}{-\cos^2 x} = -2\tan x$$

$$-2\tan x = -2\tan x$$

3.2 Les fonctions sinusoïdales

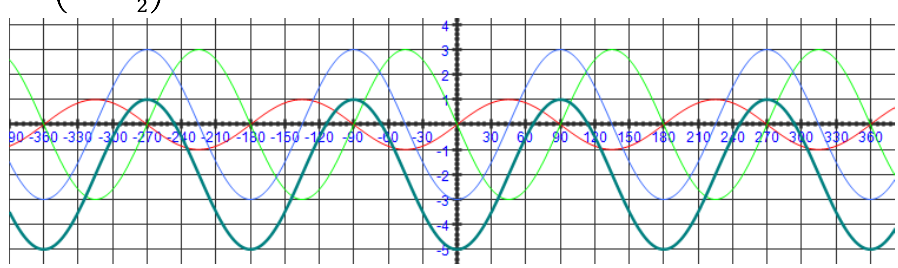
1. Représente graphiquement $y = -3\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$

$y = \sin 2x$

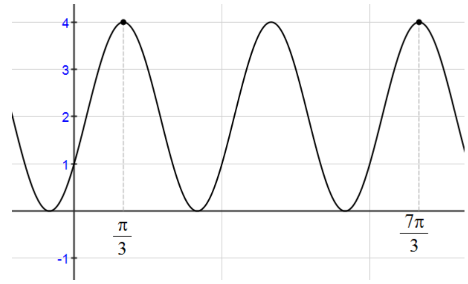
$y = -3\sin 2x$

$y = -3\sin 2(x + 45^\circ)$

$y = -3\sin 2(x + 45^\circ) - 2$



2. Détermine une fonction sinus et une fonction cosinus pour la fonction représentée graphiquement ci-dessous.



$A = 2$

$P = \dfrac{\frac{7\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}{2} = \pi = \dfrac{2\pi}{b}$

$b = 2$

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\pi\right) \rightarrow h = \frac{\pi}{12}$

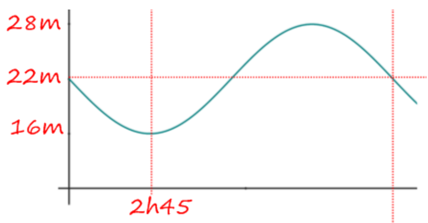
$\cos \frac{\pi}{3} \rightarrow h = \frac{\pi}{3}$

$2 \uparrow$, donc $k = 2$

$y = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + 2$

$y = 2\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$

3. La profondeur de l'eau d'une mer en fonction du temps se modélise par une fonction trigonométrique. Le compte initial coïncide avec le moment où la profondeur de la mer est à sa profondeur médiane, soit de 22 mètres. À ce moment, la profondeur de l'eau est en train de diminuer. Il s'écoule deux heures et 45 minutes (2h45) avant que la profondeur de la mer soit de 16 mètres, sa profondeur minimale. Quelle sera la profondeur de la mer 7 heures après le compte initial?



$A = -6$

$P = 4(2h45) = 11$heures

$11 = \dfrac{2\pi}{b}$

$b = \dfrac{2\pi}{11}$

$h = 0$

$k = +22$

$f(x) = -6\sin\dfrac{2\pi}{11}x + 22$

$f(7) = -6\sin\dfrac{2\pi}{11}(7) + 22$

$= 26{,}53$ mètres