

## Gauss jordan et Cramer

1. Résous à l'aide de la méthode Gauss-Jordan (matrice augmentée).

a)  $x + 2y = -1$   
 $3x - y = 11$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 11 \end{array} \right]$$

$$[1]3 - [2] \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -14 \end{array} \right]$$

$$[2] \div 7 \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$[1] - [2]2 \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$(5, -2)$

b)  $5x + 6y = 70$   
 $3x - 12y = -270$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 70 \\ 3 & -12 & -270 \end{array} \right]$$

$$[1]3 - [2]5 \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 70 \\ 0 & 78 & 1560 \end{array} \right]$$

$$[2] \div 78 \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 70 \\ 0 & 1 & 20 \end{array} \right]$$

$$[1] - [2]6 \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 5 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & 20 \end{array} \right]$$

$$[1] \div 5 \quad \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 20 \end{array} \right]$$

$(-10, 20)$

Gauss jordan et Cramer

$$x + 3y + z = 3$$

$$c) \quad x + 5y + 5z = 1$$

$$2x + 6y + 3z = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \div -1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 4 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \div -2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(16, -5, 2)$$

Gauss jordan et Cramer

$$3x + 6y + 6z = 3$$

$$d) \quad x + 3y + 10z = -10$$

$$x + 2y + 5z = -11$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 10 & -10 \\ 1 & 2 & 5 & -11 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -24 & 33 \\ 0 & 0 & -9 & 36 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \div -9 \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -24 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 24 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -63 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \div -3 \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 0 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -99 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \div 3 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -33 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

$$(-33, 21, -4)$$

Gauss jordan et Cramer

$$2x - 10y + 3z = -20$$

$$e) x - 3y + 7z = 0$$

$$x - 5y + z = -10$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -10 & 3 & -20 \\ 1 & -3 & 7 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & -10 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -10 & 3 & -20 \\ 0 & -4 & -11 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -10 & 3 & -20 \\ 0 & -4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \div -4 \begin{bmatrix} 2 & -10 & 3 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -10 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \div 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(15, 5, 0)$$

Gauss jordan et Cramer

$$x + z = 12$$

f)  $x - y = 16$

$$y + 2z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 12 \\ 1 & -1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$[1] - [2] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$[3] - [2] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$[2] - [3] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$[1] - [3] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$(8, -8, 4)$$

## Gauss jordan et Cramer

2. Dans une école, on retrouve 675 élèves de la dixième à la douzième année. Il y a 50 élèves de plus en dixième qu'en onzième et 25 élèves de plus en douzième qu'en onzième. Combien d'élèves retrouve-t-on dans chaque niveau ? Réponds à cette question en créant une matrice pour un système de trois équations à trois inconnus et en appliquant la méthode de la matrice augmentée.

$x$  : nombre d'élèves en 10<sup>e</sup>

$y$  : nombre d'élèves en 11<sup>e</sup>

$z$  : nombre d'élèves en 12<sup>e</sup>

$$x + y + z = 675$$

$$x = 50 + y$$

$$z = 25 + y$$

$$x + y + z = 675$$

$$x - y = 50$$

$$-y + z = 25$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 675 \\ 1 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \end{array} \right]$$

$$[1] - [2] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 675 \\ 0 & 2 & 1 & 625 \\ 0 & -1 & 1 & 25 \end{array} \right]$$

$$[2] + [3] \cdot 2 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 675 \\ 0 & 2 & 1 & 625 \\ 0 & 0 & 3 & 675 \end{array} \right]$$

$$[3] \div 3 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 675 \\ 0 & 2 & 1 & 625 \\ 0 & 0 & 1 & 225 \end{array} \right]$$

$$[2] - [3] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 675 \\ 0 & 2 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 225 \end{array} \right]$$

$$[2] \div 2 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 675 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 225 \end{array} \right]$$

$$[1] - [3] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 450 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 225 \end{array} \right]$$

$$[1] - [2] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 225 \end{array} \right]$$

Il y a 250 élèves en 10<sup>e</sup>, 200 élèves en 11<sup>e</sup> et 225 élèves en 12<sup>e</sup>.

## Gauss jordan et Cramer

3. Résoudre avec la méthode Cramer

$$\begin{aligned} & 3x + y = -1 \\ \text{a) } & x - y = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{1 - 3}{-3 - 1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{9 + 1}{-3 - 1} = \frac{10}{-4} = \frac{-5}{2}$$

$$\left( \frac{1}{2}, \frac{-5}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} & 3x + 4y = -1 \\ \text{b) } & 5y - 3x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{-5 + 8}{15 + 12} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9} \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{-6 - 3}{15 + 12} = \frac{-9}{27} = \frac{-1}{3}$$

$$\left( \frac{1}{9}, \frac{-1}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} & 4x - 8y = -5 \\ \text{c) } & -2x + 5y = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{-25 + 20}{20 - 16} = \frac{-5}{4} \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{10 - 10}{20 - 16} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\left( \frac{-5}{4}, 0 \right)$$

## Gauss jordan et Cramer

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 11 \\ \text{d) } 3x - y + 2z &= 10 \\ 5x + 4y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 & 11 & -3 \\ 10 & -1 & 2 & 10 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ 10 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{(11 - 6 + 40) - (-1 + 30 + 88)}{(2 - 30 + 12) - (-5 + 9 + 16)} = \frac{-72}{-36} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 & 2 & 11 \\ 3 & 10 & 2 & 3 & 10 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{(-20 + 110 + 3) - (50 - 33 + 4)}{(2 - 30 + 12) - (-5 + 9 + 16)} = \frac{72}{-36} = -2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 11 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 10 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 3 & -1 & 10 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{(-2 - 150 + 132) - (-55 - 9 + 80)}{(2 - 30 + 12) - (-5 + 9 + 16)} = \frac{-36}{-36} = 1$$

$$(2, -2, 1)$$



## Gauss jordan et Cramer

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= -7 \\ \text{e) } 5x + 7y - z &= 16 \\ x + y - z &= 6 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -7 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -2 & 4 & -7 & -2 \\ 16 & 7 & -1 & 16 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{\det \begin{bmatrix} -7 & -2 & 4 \\ 16 & 7 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{(49 + 12 + 64) - (32 + 7 + 168)}{(-21 + 2 + 20) - (10 - 3 + 28)} = \frac{-82}{-34} = \frac{41}{17}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 & 3 & -7 \\ 5 & 16 & -1 & 5 & 16 \\ 1 & 6 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 5 & 16 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{(-48 + 7 + 120) - (35 - 18 + 64)}{(-21 + 2 + 20) - (10 - 3 + 28)} = \frac{-2}{-34} = \frac{1}{17}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 & 3 & -2 \\ 5 & 7 & 16 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 5 & 7 & 16 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{(126 - 32 - 35) - (-60 + 48 - 49)}{(-21 + 2 + 20) - (10 - 3 + 28)} = \frac{120}{-34} = \frac{-60}{17}$$

$$\left( \frac{41}{17}, \frac{1}{17}, \frac{-60}{17} \right)$$