Feuille de travail – inéquations racines

Résous.

1. $\sqrt{2x+5} \le 3$

$2x+5 \ge 0$

$2x \ge -5$

$x \ge \dfrac{-5}{2}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R}, x \ge \dfrac{-5}{2}\right\}$

$\left(\sqrt{2x+5}\right)^2 = 3^2$

$2x+5 = 9$

$2x = 4$

$x = 2$

$\sqrt{2(2)+5} = 3$

$\sqrt{9} = 3$

$3 = 3$

nombres critiques: $\dfrac{-5}{2}, 2$

si $x = 0$

$\sqrt{2(0)+5} \le 3$

$\sqrt{5} \le 3$

oui

si $x = 3$

$\sqrt{2(3)+5} \le 3$

$\sqrt{11} \le 3$

non

solution : $\left[\dfrac{-5}{2}, 2\right]$

2. $\sqrt{4-3x} \ge -2$

$4-3x \ge 0$

$-3x \ge -4$

$x \le \dfrac{4}{3}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R}, x \le \dfrac{4}{3}\right\}$

$\left(\sqrt{4-3x}\right)^2 = (-2)^2$

$4-3x = 4$

$-3x = 0$

$x = 0$

$\sqrt{4-3(0)} = -2$

$\sqrt{4} = -2$

$2 \ne -2$

nombre critique: $\dfrac{4}{3}$

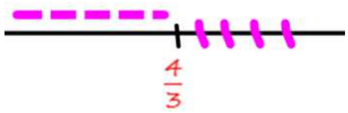
si $x = 0$

$\sqrt{4-3(0)} \ge -2$

$\sqrt{4} \ge -2$

$2 \ge -2$

oui



solution : $\left]-\infty, \dfrac{4}{3}\right]$

3. $\sqrt{x} - \sqrt{7-x} \le 0$

$x \ge 0$ et $7-x \ge 0$

$-x \ge -7$

$x \le 7$

$D = \{x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 7\}$

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{7-x}\right)^2$

$x = 7-x$

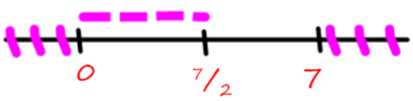
$2x = 7$

$x = \dfrac{7}{2}$

$\sqrt{\dfrac{7}{2}} - \sqrt{7-\dfrac{7}{2}} = 0$

$0 = 0$

nombres critiques: $0, \dfrac{7}{2}, 7$



si $x = 1$

$\sqrt{1} - \sqrt{7-1} \le 0$

$-1,45 \le 0$

oui

si $x = 5$

$\sqrt{5} - \sqrt{7-5} \le 0$

$0,82 \le 0$

non

solution : $\left[0, \dfrac{7}{2}\right]$

4. $\sqrt{t+2}-\sqrt{t-2}>0$

$t+2\geq 0$ et $t-2\geq 0$

$t\geq -2 \quad t\geq 2$

$D=\{t\in\mathbb{R}, t\geq 2\}$

$\left(\sqrt{t+2}\right)^2=\left(\sqrt{t-2}\right)^2$

$t+2=t-2$

$0t=4$

aucune solution

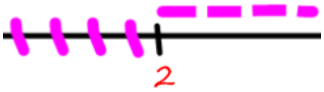
nombre critique: 2

si $x=3$

$\sqrt{3+2}-\sqrt{3-2}>0$

$1,24>0$

Oui



solution : $[2,+\infty[$

5. $\sqrt{2y+1}\leq\sqrt{y-3}$

$2y+1\geq 0$ et $y-3\geq 0$

$2y\geq -1 \quad y\geq 3$

$y\geq\dfrac{-1}{2}$

$D=\{y\in\mathbb{R}, y\geq 3\}$

$\left(\sqrt{2y+1}\right)^2=\left(\sqrt{y-3}\right)^2$

$2y+1=y-3$

$y=-4$

$-4\not\geq 3$

nombre critique: 3

si $y=4$

$\sqrt{2(4)+1}\leq\sqrt{4-3}$

$3\leq 1$

Non

aucune solution

6. $\sqrt{2x-1}+2>x$

$2x-1\geq 0$

$2x\geq 1$

$x\geq\dfrac{1}{2}$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}, x\geq\dfrac{1}{2}\right\}$

$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=(x-2)^2$

$2x-1=x^2-4x+4$

$0=x^2-6x+5$

$0=(x-5)(x-1)$

$x=5$ et $x=1$

Si $x=1$

$\sqrt{2(1)-1}+2=1$

$\sqrt{1}+2=1$

$3\neq 1$

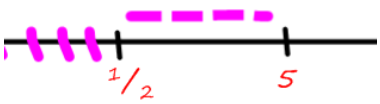
Si $x=5$

$\sqrt{2(5)-1}+2=5$

$\sqrt{9}+2=5$

$5=5$

nombres critiques: $\dfrac{1}{2}, 5$



si $x=2$

$\sqrt{2(2)-1}+2>2$

$\sqrt{3}+2>2$

oui

si $x=6$

$\sqrt{2(6)-1}+2>6$

$\sqrt{11}+2>6$

non

solution : $\left[\dfrac{-5}{2}, 2\right]$

7. $\sqrt{c} + \sqrt{c+21} < 7$

$$\left(\sqrt{c}\right)^2 = \left(7 - \sqrt{c+21}\right)^2$$

$c \geq 0 \quad c + 21 \geq 0$

$c \geq -21$

$D = \{c \in \mathbb{R}, c \geq 0\}$

$$c = 49 - 14\sqrt{c+21} + c + 21$$
$$-70 = -14\sqrt{c+21}$$
$$(5)^2 = \left(\sqrt{c+21}\right)^2$$
$$25 = c + 21$$
$$c = 4$$

Si $c = 4$

$\sqrt{4} + \sqrt{4+21} = 7$

$2 + 5 = 7$

$7 = 7$

nombres critiques: $0, 4$

Si $c = 1$

$\sqrt{1} + \sqrt{1+21} < 7$

$5{,}69 < 7$

oui

Si $c = 5$

$\sqrt{5} + \sqrt{5+21} < 7$

$7{,}34 < 7$

non

solution : $[0, 4[$

8. $\sqrt{x} > \sqrt{4\sqrt{x} - 3}$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{4\sqrt{x}-3}\right)^2$$

$x \geq 0 \quad 4\sqrt{x} \geq 3$

$16x \geq 9$

$x \geq \dfrac{9}{16}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R}, x \geq \dfrac{9}{16}\right\}$

$$x = 4\sqrt{x} - 3$$
$$(x+3)^2 = \left(4\sqrt{x}\right)^2$$
$$x^2 + 6x + 9 = 16x$$
$$x^2 - 10x + 9 = 0$$
$$(x-9)(x-1) = 0$$
$$x = 9 \text{ et } x = 1$$

Si $x = 9$

$\sqrt{9} = \sqrt{4\sqrt{9} - 3}$

$3 = 3$

Si $x = 1$

$\sqrt{1} = \sqrt{4\sqrt{1} - 3}$

$1 = 1$

nombres critiques: $\dfrac{9}{16}, 1, 9$

Si $x = 0{,}7$

$\sqrt{0{,}7} > \sqrt{4\sqrt{0{,}7} - 3}$

$0{,}8367 > 0{,}58877$

oui

Si $x = 4$

$\sqrt{4} > \sqrt{4\sqrt{4} - 3}$

$2 > 2{,}23$

non

Si $x = 10$

$\sqrt{10} > \sqrt{4\sqrt{10} - 3}$

$3{,}16 > 3{,}11$

oui

solution : $\left[\dfrac{9}{16}, 1\right[\cup \left]9, +\infty\right[$

9. $\sqrt{x} < \dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$

$x \geq 0 \qquad \sqrt{x}-3 \neq 0$

$\sqrt{x} \neq 3$

$x \neq 9$

$D = \left\{x \in \mathbb{R}, x \geq 0, x \neq 9\right\}$

$$\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right) - x}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\frac{x - 3\sqrt{x} - x}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\frac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\frac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = 0$$

$-3\sqrt{x} = 0 \qquad \sqrt{x} - 3 = 0$

$x = 0 \qquad \sqrt{x} = 3$

$x = 9$

nombres critiques: $0, 9$

	$-\infty$	0		9	$+\infty$	
$-3\sqrt{x}$	$\nexists$	0	-	-	-	Solution :
$\sqrt{x}-3$	$\nexists$	-	-	0	+	$\left]9, +\infty\right[$
$\dfrac{x+4}{x-1}$	$\nexists$	0	+	$\nexists$	-	

10. $\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{\sqrt{x-4}} \leq 0$

$x \neq 0 \qquad x - 4 \geq 0$

$x \geq 4$

$D = \left\{x \in \mathbb{R}, x \geq 4\right\}$

$$\frac{1}{x-4} - \frac{1}{\sqrt{x-4}} \leq 0$$

$$\frac{1-\sqrt{x-4}}{\left(x-4\right)} \leq 0$$

$$\frac{1-\sqrt{x-4}}{\left(x-4\right)} = 0$$

$1 - \sqrt{x-4} = 0 \qquad x - 4 \neq 0$

$-\sqrt{x-4} = -1 \qquad x \neq 4$

$x - 4 = 1$

$x = 5$

nombres critiques: $4, 5$

	$-\infty$	4		5	$+\infty$	
$1-\sqrt{x-4}$	$\nexists$	+	+	0	-	Solution :
$x-4$	$\nexists$	0	+	+	+	$\left[5, \infty\right[$
	$\nexists$	$\nexists$	+	0	-	

11. $\dfrac{2}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

$x > 0 \quad x - 2 > 0$

$x > 2$

$D = \{x \in \mathbb{R}, x > 2\}$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} < 0$$

$$\frac{2\sqrt{x-2} - 1\sqrt{x}}{\sqrt{x} \bullet \sqrt{x-2}} < 0$$

$$2\sqrt{x-2} - \sqrt{x} = 0$$
$$\left(2\sqrt{x-2}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2$$
$$4(x-2) = x$$
$$4x - 8 - x = 0$$
$$3x = 8$$
$$x = \frac{8}{3}$$

nombres critiques: $0, 2, \frac{8}{3}$

	$-\infty$	2		$\frac{8}{3}$	$+\infty$	Solution : $\left]2, \frac{8}{3}\right[$
$2\sqrt{x-2} - \sqrt{x}$	$\nexists$	-	-	0	+	
$\sqrt{x} \bullet \sqrt{x-2}$	$\nexists$	0	+	+	+	
	$\nexists$	$\nexists$	-	0	+	

12. $\sqrt{6x+7} - \sqrt{3x+3} \geq 1$

$6x + 7 \geq 0 \quad 3x + 3 \geq 0$

$6x \geq -7 \quad 3x \geq -3$

$x \geq \frac{-7}{6} \quad x \geq -1$

$D = \{x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$

$$\left(\sqrt{6x+7}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{3x+3}\right)^2$$
$$6x + 7 = 1 + 2\sqrt{3x+3} + 3x + 3$$
$$(3x+3)^2 = \left(2\sqrt{3x+3}\right)^2$$
$$9x^2 + 18x + 9 = 4(3x+3)$$
$$9x^2 + 18x + 9 - 12x - 12 = 0$$
$$9x^2 + 6x - 3 = 0$$
$$(9x+9)(9x-3)/9 = 0$$
$$9(x+1)(9x-3)/9 = 0$$
$$x = -1 \quad et \quad x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

si $x = -1$

$$\sqrt{6(-1)+7} - \sqrt{3(-1)+3} = 1$$
$$1 = 1$$

oui

si $x = \frac{1}{3}$

$$\sqrt{6\left(\frac{1}{3}\right)+7} - \sqrt{3\left(\frac{1}{3}\right)+3} = 1$$
$$3 - 2 = 1$$
$$1 = 1$$

oui

nombres critiques: $-1, \frac{1}{3}$

si $x = 0$

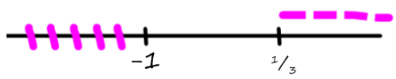
$$\sqrt{6(0)+7} - \sqrt{3(0)+3} \geq 1$$
$$-2{,}73 \geq 1$$

Non

si $x = 1$

$$\sqrt{6(1)+7} - \sqrt{3(1)+3} = 1$$
$$1{,}16 \geq 1$$

oui



solution : $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

13. $\sqrt{4x+4}+1 > 2\sqrt{x+1}$

$4x+4 \geq 0 \qquad x+1 \geq 0$

$4x \geq -4 \qquad x \geq -1$

$x \geq -1$

$D = \{x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$

$$\left(\sqrt{4x+4}\right)^2 = \left(2\sqrt{x+1}-1\right)^2$$
$$4x+4 = 4(x+1) - 4\sqrt{x+1}+1$$
$$4x-4x+4-4-1 = -4\sqrt{x+1}$$
$$(-1)^2 = \left(-4\sqrt{x+1}\right)^2$$
$$1 = 16(x+1)$$
$$1 = 16x+16$$
$$-15 = 16x$$
$$x = \frac{-15}{16}$$

si $x = -\frac{15}{16}$

$$\sqrt{4\left(\frac{-15}{16}\right)+4}+1 = 2\sqrt{\frac{-15}{16}+1}$$
$$\frac{3}{2} \neq \frac{1}{2}$$

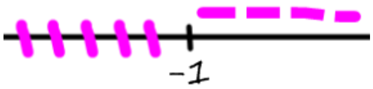
non

nombres critiques: -1

si $x = 0$

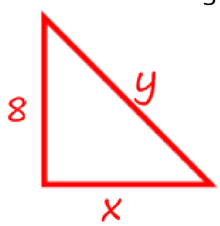
$$\sqrt{4(0)+4}+1 > 2\sqrt{0+1}$$
$$3 \geq 2$$

oui



solution : $[-1, +\infty[$

14) Dans un triangle rectangle, une cathète mesure 8 cm. Quelle doit être la mesure de l'autre cathète afin que le périmètre du triangle soit supérieur à 24 cm?



$$y^2 = x^2 + 8^2$$
$$y = \sqrt{x^2+64}$$
$$D = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

$$P = x + 8 + \sqrt{x^2+64} > 24$$
$$\sqrt{x^2+64} > 24 - x - 8$$
$$\left(\sqrt{x^2+64}\right)^2 = (-x+16)^2$$
$$x^2+64 = x^2 - 32x + 256$$
$$32x = 256 - 64$$
$$32x = 192$$
$$x = 6$$

$$\sqrt{6^2+64} = -6+16$$
$$10 = 10$$

oui

nombres critiques: $0, 6$

si $x = 1$

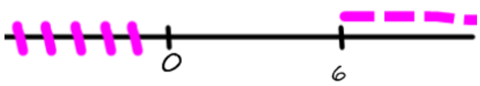
$$\sqrt{1^2+64}+1+8 > 24$$
$$17{,}06 > 24$$

non

si $x = 10$

$$\sqrt{10^2+64}+10+8 > 24$$
$$30{,}8 > 24$$

oui



solution : $]6, \infty[$

15) Une ingénieure conçoit des montagnes russes qui comportent une descente verticale juste sous le sommet du manège. Elle utilise l'équation $v = \sqrt{(v_0)^2 + 2ad}$ pour modéliser la vitesse des wagons, v, en pieds à la seconde, après une descente de d pieds, selon une vitesse initiale v_0, en pieds à la seconde, et un accélération constante a, en pied à la seconde carrée. La vitesse maximale que peut atteindre un wagon est de 120 pi/s au pied de la descente verticale. La vitesse initiale des wagons au sommet de la descente est de 10 pi/s et l'accélération due à la gravité est de 32 pi/s². Quelle plage de valeur peut prendre la hauteur de la montagne russe?

$$V = 120pi/s \text{ max}$$
$$V_o = 10pi/s$$
$$a = 32pi/s^2$$
$$d = ?$$

$$\sqrt{10^2 + 2(32)d} \le 120$$
$$D = \{d \in \mathbb{R}, d > 0\}$$

$$\left(\sqrt{10^2 + 64d}\right)^2 = (120)^2$$
$$100 + 64d = 14400$$
$$64d = 14300$$
$$d = \frac{3575}{16}$$

$$\sqrt{10^2 + 64\left(\frac{3575}{16}\right)} = 120$$
$$120 = 120$$
oui

nombres critiques: $0, \frac{3575}{16}$

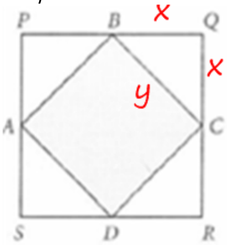
si $x = 1$
$$\sqrt{10^2 + 64(1)} \le 120$$
$$12,8 \le 120$$
oui

si $x = 225$
$$\sqrt{10^2 + 64(225)} \le 120$$
$$120,42 \le 120$$
non

solution : $\left]0, \frac{3575}{16}\right]$

16) Soit le carré PQRS. On construit le carré ABCD en reliant les points milieux de chaque côté.

a) Quelles valeurs peuvent prendre l'aire du carré PQRS si le périmètre du carré ABCD est supérieur à 100 cm?



$$y^2 = x^2 + x^2$$
$$y = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$$
$$D = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

$$P_{ABCD} = 4\left(\sqrt{2}x\right) > 100$$
$$x > \frac{100}{4\sqrt{2}} = \frac{25}{4\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$x > \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{PQRS} > 2\left(\frac{25\sqrt{2}}{2}\right) \times 2\left(\frac{25\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$A_{PQRS} > 1250cm^2$$

b) Quelles valeurs peuvent prendre le périmètre de du carré ABCD si le périmètre du triangle PAB est inférieur à 20 cm?

$$P_{PAB} = x + x + \sqrt{2}x < 20$$
$$x\left(2 + \sqrt{2}\right) < 20$$
$$x < \frac{20}{2 + \sqrt{2}}$$

$$P_{ABCD} < 4\left(\sqrt{2}\left(10\left(2 - \sqrt{x}\right)\right)\right)$$
$$P_{ABCD} < 80\sqrt{2} - 80$$