Bloc 2 – Régularité et algèbre - Fonction et inéquations quadratiques

1. Un tuyau d'arrosage pulvérise un jet d'eau sur une pelouse. L'équation $h(d) = -0,25d^2 + 2d + 1$ décrit la hauteur, h, du flux d'eau au-dessus de la pelouse en fonction de la distance horizontale, d, de l'embout du tuyau. La hauteur et la distance horizontale sont mesurées en mètres.

a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par l'eau ?

$$h = -0,25\left[\left(d^2 - 8d + 16\right) - 16 - 4\right]$$
$$h = -0,25\left[\left(d - 4\right)^2 - 20\right]$$
$$h = -0,25\left(d - 4\right)^2 + 5$$

L'eau atteint une hauteur maximale de 5 m.

b) Quelle distance horizontale correspond à la hauteur maximale du jet d'eau.

L'eau atteint la hauteur maximale à 4 m de l'embout du tuyau.

c) Quelle hauteur est l'embout du tuyau ?

$$h(d) = -0,25d^2 + 2d + 1$$
$$h(0) = -0,25(0)^2 + 2(0) + 1 = 1\text{mètre}$$

d) À quelle distance horizontale sera l'eau frappe le sol ?

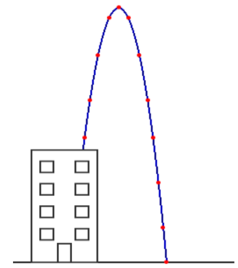
$$h(d) = -0,25d^2 + 2d + 1$$
$$0 = -0,25d^2 + 2d + 1$$
$$d = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-0,25)(1)}}{2(-0,25)}$$
$$d = \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{-0,5} = \frac{-2 \pm 2,24}{-0,5}$$
$$d = 8,48\text{m} \quad \text{ou} \quad -0,48\text{m à rejeter}$$

Elle frappe le sol à une distance de 8,48m.

e) Sur quelle distance horizontale, la hauteur du jet d'eau est-elle plus que 3mètres ?

$$h(d) = -0,25d^2 + 2d + 1 \geq 3$$
$$0 = -0,25d^2 + 2d - 2$$
$$d = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-0,25)(-2)}}{2(-0,25)}$$
$$d = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{-0,5} = \frac{-2 \pm 1,41}{-0,5}$$
$$d = 1,18\,\text{m} \quad \text{ou} \quad d = 6,82\,\text{m}$$

Sur une distance de 5,64 mètres.



2. Une balle est lancée du haut d'un édifice de 128 pieds de hauteur, avec une vitesse initiale de 32 pieds par seconde. La hauteur de la balle en fonction du temps, peut être modélisée par la fonction h (t) = $-16\ t^2 + 32\ t + 128$. Combien de temps la balle prendra-t-elle avant de toucher le sol ?

$$h(t) = -16t^2 + 32d + 128$$
$$0 = -16t^2 + 32d + 128$$
$$t = \frac{-32 \pm \sqrt{(32)^2 - 4(-16)(128)}}{2(-16)}$$
$$t = \frac{-32 \pm \sqrt{9216}}{-32} = \frac{-32 \pm 96}{-32}$$
$$t = -2\,s \quad ou \quad t = 4\,s$$

La balle prend 4 secondes avant de toucher le sol.

3. Une balle est lancée du haut d'un édifice de 288 pieds de hauteur, avec une vitesse initiale de 48 pieds par seconde. La hauteur de la balle est définie par la fonction h(t) = $-16t^2 + 48t + 288$. Comment longtemps la balle sera-t-elle plus de 320 pieds de hauteur?

$$h(t) = -16t^2 + 48d + 288 > 320$$
$$-16t^2 + 48d + 288 - 320 = 0$$
$$-16t^2 + 48d - 32 = 0$$
$$t = \frac{-48 \pm \sqrt{(48)^2 - 4(-16)(-32)}}{2(-16)}$$
$$t = \frac{-48 \pm \sqrt{256}}{-32} = \frac{-48 \pm 16}{-32}$$
$$t = 1\,s \quad ou \quad t = 2\,s$$

Elle sera plus haute que 320 pieds pendant 1 seconde.

4. Un cultivateur veut construire un enclos rectangulaire le long d'un côté de son étable. S'il a une clôture de 80 mètres de longueur, trouve les dimensions qui permettront une superficie de plus de 288 m^2?

$$2x + y = 80\,m \quad \text{et} \quad xy > 288\ m^2$$
$$y = 80 - 2x \rightarrow x(80 - 2x) > 288$$

$$-2x^2 + 80x - 288 = 0$$
$$-2(x^2 - 40x + 144) = 0$$
$$-2(x - 36)(x - 4) = 0$$
$$x = 4 \text{ ou } x = 36$$

$$2(4) + y = 80$$
$$y = 72\,m$$
$$2(36) + y = 80$$
$$y = 8\,m$$

Il faut que le côté double soit plus de 4 m mais moins de 36 m pour que l'aire soit au-dessus de 288m², et l'autre côté varie entre 8 m et 72 m.

si $x = 5$
$$x(80 - 2x) > 288$$
$$5(80 - 10) > 288$$
$$350 > 288$$

5. Un sondage a déterminé que 400 personnes assisteront à une pièce de théâtre dont le prix d'entrée est de 18 \$. L'assistance diminue de 25 personnes pour chaque augmentation de 2 \$. Quel sera le prix d'entrée qui permettra d'accumuler les recettes d'au moins de 7500\$?

$$\text{nombre} = 400 - 2x$$
$$\text{prix} = 18\$ + 2x$$

$$(400 - 25x)(18 + 2x) \geq 7500$$
$$7200 + 800x - 450x - 50x^2 - 7500 = 0$$
$$-50x^2 + 350x - 300 = 0$$
$$-50(x^2 - 7x + 6) = 0$$
$$-5(x - 6)(x - 1) = 0$$
$$x = 6 \text{ ou } x = 1$$

si $x = 1$
$$\text{prix} = 18\$ + 2(1) = 20\$$$
si $x = 6$
$$\text{prix} = 18\$ + 2(6) = 30\$$$

Le prix ne devrait pas être moins de 20\$ et pas plus de 30\$ afin d'accumuler au moins 7500\$.

6. Une orangerie compte maintenant 20 arbres à l'acre et le rendement moyen est de 300 oranges par arbre. On estime que pour chaque arbre additionnel planté à l'acre, le rendement moyen par arbre diminuera de 10 oranges. Combien d'arbres à l'acre donneront au moins 6090 oranges?

$$\text{nb.d'arbre} = 20 + x$$
$$\text{nb.d'oranges / arbre} = 300 - 10x$$

$$(20 + x)(300 - 10x) \geq 6090$$
$$6000 - 200x + 300x - 10x^2 - 6090 = 0$$
$$-10x^2 + 100x - 90 = 0$$
$$-10(x^2 - 10x + 9) = 0$$
$$-10(x - 9)(x - 1) = 0$$
$$x = 9 \text{ ou } x = 1$$

si $x = 1$
$$\text{nb d'arbres} = 20 + 1 = 21$$
si $x = 9$
$$\text{nb d'arbres} = 20 + 9 = 29$$

Il faudrait avoir de 21 à 29 arbres afin de produire au moins 6090 oranges.