Feuille de travail

1. Résous.

a) $\dfrac{8x}{x^2-4} \geq 0$

$\dfrac{8x}{(x-2)(x+2)} \geq 0$ Nombres critiques : -2, 0, 2

	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$	
8x	-	-	-	0	+	+	+	Solution :
x - 2	-	0	+	+	+	+	+	$\left]-2,0\right] \cup \left]2,+\infty\right[$
x + 2	-	-	-	-	-	0	+	
$\dfrac{8x}{(x-2)(x+2)}$	-	$\notin$	+	0	-	$\notin$	+	

b) $\dfrac{2x+3}{x-1} \leq 0$ Nombres critiques : $\dfrac{-3}{2}, 1$

	$-\infty$	$\dfrac{-3}{2}$		1	$+\infty$	
2x+3	-	0	+	+	+	Solution :
x - 1	-	-	-	0	+	$\left[\dfrac{-3}{2},1\right[$
$\dfrac{2x+3}{x-1}$	+	0	-	$\notin$	+	

c) $\dfrac{9}{(x+1)^2} > 1$

$\dfrac{9}{(x+1)^2} - 1 > 0 \rightarrow \dfrac{9-(x+1)^2}{(x+1)^2} > 0$

$\dfrac{9-x^2-2x-1}{(x+1)^2} > 0 \rightarrow \dfrac{-x^2-2x+8}{(x+1)^2} > 0$ Nombres critiques : $-4, -1, 2$

$\dfrac{-(x^2+2x-8)}{(x+1)^2} > 0 \rightarrow \dfrac{-(x+4)(x-2)}{(x+1)^2} > 0$

	$-\infty$	-4		-1		2	$+\infty$	
-(x + 4)	+	0	-	-	-	-	-	
x - 2	-	-	-	-	-	0	+	Solution :
$(x+1)^2$	+	+	+	0	+	+	+	$\left]-4,-1\right[\cup \left]-1,2\right[$
$\dfrac{-(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$	-	0	+	$\notin$	+	0	-	

d) $\dfrac{x-7}{x+2} \geq \dfrac{x-9}{x+3}$

$$\frac{x-7}{x+2} - \frac{x-9}{x+3} \geq 0 \rightarrow \frac{(x-7)(x+3)-(x-9)(x+2)}{(x+2)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 7x + 3x - 21 - (x^2 - 9x + 2x - 18)}{(x+2)(x+3)} \geq 0$$

Nombres critiques : -3, -2, 1

$$\frac{x^2 - 4x - 21 - x^2 + 7x + 18}{(x+2)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{3x-3}{(x+2)(x+3)} \geq 0$$

	$-\infty$	-3		-2		1	$+\infty$	
3x - 3	-	-	-	-	-	0	+	
x + 2	-	-	-	0	+	+	+	Solution :
x + 3	-	0	+	+	+	+	+	$]-3,-2[\,\cup\,[1,+\infty[$
$\dfrac{3x-3}{(x+2)(x+3)}$	-	$\notin$	+	$\notin$	-	0	+	

e) $\dfrac{2x}{x^2-9} + \dfrac{x}{x^2+x-12} \geq \dfrac{3x}{x^2+7x+12}$

$$\frac{2x}{(x+3)(x-3)} + \frac{x}{(x+4)(x-3)} - \frac{3x}{(x+4)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{2x(x+4) + x(x+3) - 3x(x-3)}{(x+3)(x-3)(x+4)} \geq 0$$

Nombres critiques : -4, -3, 0, 3

$$\frac{2x^2 + 8x + x^2 + 3x - 3x^2 + 9x}{(x+3)(x-3)(x+4)} \geq 0$$

$$\frac{20x}{(x+3)(x-3)(x+4)} \geq 0$$

	$-\infty$	-4		-3		0		3	$+\infty$	
20x	-	-	-	-	-	0	+	+	+	
x + 3	-	-	-	0	+	+	+	+	+	
x – 3	-	-	-	-	-	-	-	0	+	Solution :
x + 4	-	0	+	+	+	+	+	+	+	$]-\infty,-4[\,\cup\,]-3,0]\,\cup\,]3,\infty[$
$\dfrac{20x}{(x+3)(x-3)(x+4)}$	+	$\notin$	-	$\notin$	+	0	-	$\notin$	+	

f) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+1}\le 1$

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+1}-1\le 0$$

$$\frac{(x+1)(x+1)+(x+2)(x+2)-(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)}\le 0$$

$$\frac{x^2+2x+1+x^2+4x+4-x^2-3x-2}{(x+2)(x+1)}\le 0$$

$$\frac{x^2+3x+3}{(x+2)(x+1)}\le 0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(1)(3)}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}$$

aucune racine

Nombres critiques : -1 et -2

	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$	
x^2+3x+3	+	+	+	+	+	Solution : $]-2,-1[$
$x+1$	-	-	-	0	+	
$x+2$	-	0	+	+	+	
$\dfrac{x^2+3x+3}{(x+2)(x+1)}$	+	$\notin$	-	$\notin$	+	

g) $4\ge \dfrac{4}{x}+x$

$$4-\frac{4}{x}-x\ge 0$$

$$\frac{4x-4-x^2}{x}\ge 0$$

$$\frac{-(x^2-4x+4)}{x}\ge 0$$

$$\frac{-(x-2)(x-2)}{x}\ge 0$$

nombres critiques : 0, 2

	$-\infty$	0		2	$+\infty$	
$-(x-2)$	+	+	+	0	-	Solution : $]-\infty,0[\cup\{2\}$
$x-2$	-	-	-	0	+	
x	-	0	+	+	+	
$\dfrac{-(x-2)(x-2)}{x}$	+	$\notin$	-	0	-	

h) $\dfrac{2x}{3(x-2)} - \dfrac{x+5}{2(x+1)} \geq \dfrac{4}{x^2-x-2}$

$$\frac{2x}{3(x-2)} - \frac{x+5}{2(x+1)} - \frac{4}{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{2x(2(x+1)) - (x+5)(3(x-2)) - 4(6)}{6(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{4x^2+4x-(3x^2-6x+15x-30)-24}{6(x-2)(x+1)} \geq 0$$

nombres critiques : -1, 2, 3

$$\frac{4x^2+4x-3x^2-9x+30-24}{6(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2-5x+6}{6(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$$\frac{(x-3)(x-2)}{6(x-2)(x+1)} \geq 0$$

	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$	
x - 3	-	-	-	-	-	0	+	
x - 2	-	-	-	0	+	+	+	
6(x – 2)	-	-	-	0	+	+	+	Solution :
x + 1	-	0	+	+	+	+	+	$]-\infty,-1[\cup [3,+\infty[$
$\dfrac{(x-3)(x-2)}{6(x-2)(x+1)}$	+	$\notin$	-	$\notin$	-	0	+	

i) $\dfrac{x}{x^2+4x-5} + \dfrac{3}{x^2-25} \leq \dfrac{2x}{x^2-6x+5}$

$$\frac{x}{(x+5)(x-1)} + \frac{3}{(x+5)(x-5)} - \frac{2x}{(x-5)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x(x-5)+3(x-1)-2x(x+5)}{(x+5)(x-1)(x-5)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-5x+3x-3-2x^2-10x}{(x+5)(x-1)(x-5)} \leq 0$$

$$\frac{-x^2-12x-3}{(x+5)(x-1)(x-5)} \leq 0$$

$$\frac{-(x^2+12x+3)}{(x+5)(x-1)(x-5)} \leq 0$$

$$\frac{-(x+6-\sqrt{33})(x+6+\sqrt{33})}{(x+5)(x-1)(x-5)} \leq 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-4(1)(3)}}{2}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{132}}{2} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{33}}{2}$$

$$x = -6 \pm \sqrt{33}$$

Nombres critiques : -5, 1, 5, $-6 \pm \sqrt{33}$

	$-\infty$	$-6-\sqrt{33}$		-5		$-6+\sqrt{33}$		1		5	$+\infty$
$-\left(x+6-\sqrt{33}\right)$	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-
$x+6+\sqrt{33}$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
x + 5	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
x - 1	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
x - 5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{\left(x+6-\sqrt{33}\right)\left(x+6+\sqrt{33}\right)}{(x+5)(x-1)(x-5)}$	+	0	-	$\notin$	+	0	-	$\notin$	+	$\notin$	-

Solution :
$\left[-6-\sqrt{33},-5\right[$
$\cup\left[-6+\sqrt{33},1\right[$
$\cup\left]5,+\infty\right[$

j) $\frac{x+1}{x-6}+\frac{x+1}{x^2}\geq 0$

$$\frac{(x+1)x^2+(x+1)(x-6)}{x^2(x-6)}\geq 0$$

$$\frac{x^3+x^2+x^2-5x-6}{x^2(x-6)}\geq 0$$

$$\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2(x-6)}\geq 0$$

$$\frac{(x+1)(x+3)(x-2)}{x^2(x-6)}\geq 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$(x+1)(x^2+x-6)$
$(x+1)(x+3)(x-2)$

nombres critiques : -3, -1, 0, 2, 6

	$-\infty$	-3		-1		0		2		6	$+\infty$
x + 1	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
x + 3	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
x - 2	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
x^2	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
x - 6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{(x+1)(x+3)(x-2)}{x^2(x-6)}$	+	0	-	0	+	$\notin$	+	0	-	$\notin$	+

Solution :
$\left]-\infty,3\right]\cup\left[-1,0\right[$
$\cup\left]0,2\right]\cup\left]6,+\infty\right[$

2. En économie, on définit la marge de profit en effectuant le rapport entre les profits et les revenus. Par exemple, si on vend un article qui a coûté 100$ à 125$, on a une marge de profit de 20% $\left(\frac{125-100}{125}=0,2\right)$.

Soit une compagnie dont les revenus et les coûts sont donnés respectivement par $R(q)=-10q^2+1000q$ et $C(q)=-8q^2+650q+104$, où q désigne le nombre de milliers d'unités produites, $R(q)$, les revenus totaux en milliers de dollars et $C(q)$, les coût en milliers de dollars.

Quelle doit être la quantité produite pour que la compagnie ait une marge de profit d'au moins 30%?

$$\frac{-10q^2+1000q-\left(-8q^2+650q+104\right)}{-10q^2+1000q}\geq 0,30$$

$$\frac{-10q^2+1000q+8q^2-650q-104-0,30\left(-10q^2+1000q\right)}{-10q\left(q-100\right)}\geq 0$$

$$\frac{-2q^2+350q-104+3q^2-300q}{-10q\left(q-100\right)}\geq 0$$

$$\frac{q^2+50q-104}{-10q\left(q-100\right)}\geq 0$$

$$\frac{\left(q+52\right)\left(q-2\right)}{-10q\left(q-100\right)}\geq 0$$

Nombres critiques : -52, 0, 2, 100 La quantité ne peut pas être négative.

	$-\infty$	-52		0		2		100	$+\infty$	
q + 52	-	0	+	+	+	+	+	+	+	Solution : $[2,100[$
q - 2	-	-	-	-	-	0	+	+	+	
-10q	+	+	+	0	-	-	-	-	-	
q - 100	-	-	-	-	-	-	-	0	+	
$\frac{(q+52)(q-2)}{-10q(q-100)}$	-	0	+	$\notin$	-	0	+	$\notin$	-	

Entre 2000 et 100000 unités.

3. Une petite entreprise se spécialise en photographie aérienne. Le graphique suivant présente la largeur d'un lac de 1 km de diamètre sur la photo, en mm, en fonction de l'altitude lors de la prise de photo, en mètres.
Quelle doit être l'altitude de l'appareil pour que la largeur du lac soit supérieure à 8 mm sur la photo?

A.V. $\rightarrow x = 200$

A.H. $\rightarrow y = 2$

$$y = \frac{a}{x-h} + k; (1700, 4)$$

$$4 = \frac{a}{1700-200} + 2$$

$$2 = \frac{a}{1500}$$

$$a = 3000$$

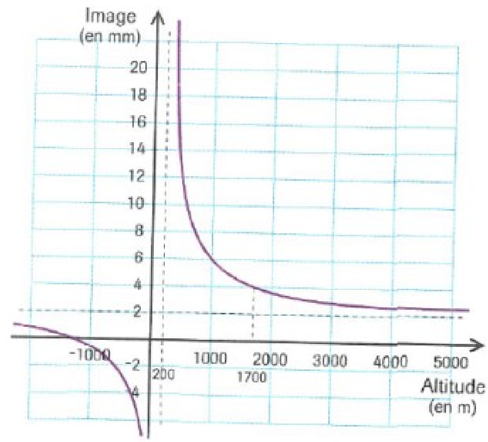
$$8 < \frac{3000}{x-200} + 2$$

$$0 < \frac{3000 - 6(x-200)}{x-200}$$

$$0 < \frac{3000 - 6x + 1200}{x-200}$$

$$0 < \frac{-6x + 4200}{x-200}$$

$$0 < \frac{-6(x-700)}{x-200}$$



	$-\infty$	200		700	$+\infty$	
-6(x – 700)	+	+	+	0	-	Solution :
x - 200	-	0	+	+	+	$]200, 700[$
$\frac{-6(x-700)}{x-200}$	-	$\notin$	+	0	-	

Entre 200 et 700 mètres d'altitude.

4. La température, T, en °C, d'une certaine personne lorsqu'elle est atteinte d'un virus varie selon la fonction $T(t) = \frac{10t}{t^2+1} + 37$ où t est le temps écoulé depuis l'infection du virus, en heures.
Pendant combien d'heures et de minutes la température de la personne est-elle supérieure à 40°C?

$$\frac{10t}{t^2+1} + 37 > 40$$

$$\frac{10t - 3(t^2+1)}{t^2+1} > 0$$

$$\frac{10t - 3t^2 - 3}{t^2+1} > 0$$

$$\frac{-(3t^2 - 10t + 3)}{t^2+1} > 0$$

$$\frac{-(3t-9)(3t-1)/3}{t^2+1} > 0$$

$$\frac{-3(t-3)(3t-1)/3}{t^2+1} > 0$$

	$-\infty$	$1/3$		3	$+\infty$	
-(t – 3)	+	+	+	0	-	Solution :
3x - 1	-	0	+	+	+	$\left]\frac{1}{3}, 3\right[$
$t^2 + 1$	+	+	+	+	+	
$\frac{-(t-3)(3t-1)}{t^2+1}$	-	0	+	0	-	

Nombres critiques : $1/3$, 3

$$1\text{heure} = 60 \text{ min}$$

$$\frac{1}{3}\text{heure} = x$$

$$x = 20 \text{ min}$$

Pendant 2heures et 40 minutes.

5. La population P, en milliers, d'une communauté de villégiature est donnée par la règle $P(t) = \dfrac{500t}{2t^2 + 18}$, où t est le nombre de mois écoulés.

Sur quel intervalle de temps la population de la communauté sera-t-elle supérieure à 40 000?

$$\frac{500t}{2t^2+18} > 40$$

$$\frac{500t - 40\left(2t^2+18\right)}{2t^2+18} > 0$$

$$\frac{500t - 80t^2 - 720}{2t^2+18} > 0$$

$$\frac{-20\left(4t^2 - 25t + 36\right)}{2t^2+18} > 0$$

nombres critiques : $^9/_4$, 4

$$\frac{-20\left(4t-16\right)\left(4t-9\right)/\,4}{2t^2+18} > 0$$

$$\frac{-20\times 4\left(t-4\right)\left(4t-9\right)/\,4}{2t^2+18} > 0$$

$$\frac{-20\left(t-4\right)\left(4t-9\right)}{2t^2+18} > 0$$

	$-\infty$	$^9/_4$		4	$+\infty$	
-20(t – 4)	+	+	+	0	-	Solution : $\left]\dfrac{9}{4}, 4\right[$
4t - 9	-	0	+	+	+	
$2t^2$ + 18	+	+	+	+	+	
$\dfrac{-20\left(t-4\right)\left(4t-9\right)}{2t^2+18}$	-	0	+	0	-	

Entre le 2e mois et 1 semaine et le 4e mois.