1. Résous chaque équation. Arrondis ta réponse au millième. (No 13 à 24)

a) $1500 = 5e^{0,045x}$

$$\frac{1500}{5} = \frac{5e^{0,045x}}{5}$$
$$300 = e^{0,045x}$$
$$\ln 300 = 0,045x$$
$$x = \frac{5,7037}{0,045} = 126,75$$

b) $2 = e^{5k}$

$$\ln 2 = 5k$$
$$k = \frac{0,693147}{5}$$
$$k = 0,1386$$

c) $65 = e^{7n}$

$$\ln 65 = 7n$$
$$n = \frac{4,1744}{7}$$
$$n = 0,5963$$

d) $45 = e^{0,074y}$

$$\ln 45 = 0,074y$$
$$y = \frac{3,8067}{0,074}$$
$$y = 51,44$$

e) $\ln 3,6 = 0,034t$

$$t = \frac{1,2809}{0,034}$$
$$t = 37,67$$

f) $\ln 45,3 = 0,24k$

$$k = \frac{3,8133}{0,24}$$
$$k = 15,89$$

g) $\ln 1,5 = 0,002n$

$$n = \frac{0,4055}{0,002}$$
$$n = 202,73$$

h) $\ln 625 = 2,5x$

$$x = \frac{6,4378}{2,5}$$
$$x = 2,58$$

i) $\ln(2x) + 3 = 0$

$$\ln(2x) = -3$$
$$e^{-3} = 2x$$
$$0,049787 = 2x$$
$$x = 0,0249$$

j) $\ln x^2 - \ln x = 5$

$$\ln\left(\frac{x^2}{x}\right) = 5$$
$$e^5 = x$$
$$x = 148,41$$

k) $\ln x + \ln 5 = 2$

$$\ln(5x) = 2$$
$$e^2 = 5x$$
$$x = 1,48$$

l) $e^{\ln x - \ln 3} = 2$

$$\ln 2 = \ln x - \ln 3$$
$$\ln 2 = \ln\left(\frac{x}{3}\right)$$
$$2 = \frac{x}{3}$$
$$x = 6$$

2. La règle $V = 1000e^{\frac{9t}{5}} - 1000$ permet de calculer la vitesse V (en nombre de tours/min) d'une turbine à vapeur en fonction du temps t (en min). Un système de sécurité fait en sorte que la turbine cesse de tourner lorsque sa vitesse atteint 25000 tours/min. (no 1)

a) Combien de temps après la mise en marche de la turbine le système de sécurité s'active-t-il?

$$25000 = 1000e^{\frac{9t}{5}} - 1000$$
$$26000 = 1000e^{\frac{9t}{5}}$$
$$26 = e^{\frac{9t}{5}}$$
$$\ln 26 = \frac{9t}{5}$$
$$3,2581 \times 5 = 9t$$
$$t = 1,81 \text{ min}$$

b) Quelle est la vitesse angulaire, en rad/s, de la turbine après 3 minutes ?

$$V = 1000e^{\frac{9(3)}{5}} - 1000$$

$$V = 1000e^{\frac{9t}{5}} = 220406 \text{ tour / min}$$

$$1\text{tour} = 2\pi\text{rad}$$

$$220406\text{tours} = x$$

$$x = 1384854{,}36\text{rad}$$

$$1384854{,}36\text{rad} = 60 \text{ sec}$$

$$x = 1 \text{ sec}$$

$$x = 23080{,}9\text{rad / sec}$$

3. Une tasse contenant du café dont la température est de 95° C est placée dans une pièce maintenue à une température constante de 22°C. Au bout de t min, la température (en degrés Celsius) du café est donnée par $T(t) = 22 + 73e^{-0{,}04667t}$.

a) Dans combien de temps la température du café sera-t-elle de 75°C?

$$75 = 22 + 73e^{-0{,}04667t}$$

$$\frac{53}{73} = \frac{73e^{-0{,}04667t}}{73}$$

$$e^{-0{,}04667t} = 0{,}72602$$

$$\ln 0{,}72602 = -0{,}04667t$$

$$t = 6{,}86 \text{ min}$$

$$6{,}86 \text{ min}$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ sec}$$

$$0{,}86 \text{ min} = x$$

$$x = 51{,}6 \text{ sec}$$

donc 6 min 52 sec

b) Dans combien de temps la température du café sera-t-elle de 60°C?

$$60 = 22 + 73e^{-0{,}04667t}$$

$$\frac{38}{73} = \frac{73e^{-0{,}04667t}}{73}$$

$$e^{-0{,}04667t} = 0{,}52055$$

$$\ln 0{,}52055 = -0{,}04667t$$

$$t = 14 \text{ min}$$

4. Si deux langues ont évolué séparément à partir d'une langue ancestrale commune, l'équation suivante représente le nombre d'années qui se sont écoulées depuis le début de leur évolution séparée, $T(m) = -5000 \ln m$ où m est le pourcentage de mots de la langue ancestrale qui sont communs aux deux langues. À ton avis, si deux langues ont commencé à évoluer séparément il y a 2000 ans, quel pourcentage de mots provenant de la langue ancestrale seront communs à ces deux langues aujourd'hui?

$$\frac{2000}{-5000} = \frac{-5000 \ln m}{-5000}$$

$$\ln m = -0,4$$

$$e^{-0,4} = m$$

$$m = 0,67 = 67\%$$

5. Un nouveau virus se propage dans la population, de sorte que t semaines après son apparition, on compte $N(t) = \dfrac{5}{2 + 8e^{-0,45t}}$ milliers de personnes l'ayant contracté.

a) Initialement, combien de personnes étaient porteuses du virus?

$$N(0) = \frac{5}{2 + 8e^{-0,45(0)}}$$

$$N(0) = \frac{5}{2 + 8(1)} = \frac{1}{2}$$

donc 500 personnes.

b) Si aucune mesure n'est prise, combien de personnes auront contracté le virus 4 semaines après son apparition?

$$N(4) = \frac{5}{2 + 8e^{-0,45(4)}}$$

$$N(4) = \frac{5}{2 + 8(0,165298889)} = 1,5$$

donc 1500 personnes

c) Si aucune mesure n'est prise, dans combien de temps le nombre de personnes ayant contracté le virus aura-t-il doublé?

$$1 = \frac{5}{2+8e^{-0,45t}}$$
$$1 = \frac{5}{2+8e^{-0,45t}}$$
$$2+8e^{-0,45t} = 5$$
$$8e^{-0,45t} = 3$$
$$e^{-0,45t} = \frac{3}{8}$$
$$\ln\left(\frac{3}{8}\right) = -0,45t$$
$$t = 2,18$$

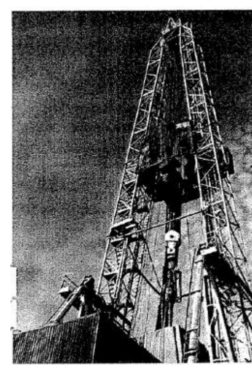
2,18semaines	1,26 jours	6,24heures
1sem = 7 j	1 jour = 24h	1heure = 60 min
0,18sem = x	0,26 jour = x	0,24h = x
x = 1,26 jours	x = 6,24heures	x = 14 min

Il faudra 2 semaines, une journée et 6h14min.

d) Si aucune mesure n'est prise, dans combien de temps le nombre de personnes ayant contracté le virus aura-t-il triplé?

D'après les réponses en a) et b), il faudrait 4 semaines.

6. Lors d'un forage, la friction exercée sur la tige devient de plus en plus importante au fur et à mesure que la profondeur du trou augment, ralentissant ainsi la vitesse de rotation de la tige. Pour une profondeur P (en m), on peut calculer la vitesse de rotation v (en nombre de tours/min) à l'aide de l'inéquation $\ln P = 38 - 5\ln V$. Établissez la règle qui permet de calculer la profondeur du trou selon la vitesse de rotation de la tige.



$$\ln P + 5\ln V = 38$$
$$\ln PV^5 = 38$$
$$e^{38} = PV^5$$
$$P = \frac{e^{38}}{V^5}$$

7. Dans un bassin d'épuration des eaux usées, un processus biochimique fait en sorte que la concentration de polluants diminue de 10% par jour par rapport à la journée précédente. Cette situation est définie par la règle $C = C_o e^{-0,1t}$, où C représente la concentration de polluants, t, le temps (en jours), et C_o, la concentration initiale de polluants dans l'eau acheminée vers le bassin d'épuration.
a) Cinq jours après que l'eau a été acheminée vers le bassin d'épuration, quel pourcentage de la concentration initiale de polluants reste-t-il?

$$C = C_o e^{-0,1(5)}$$
$$C = 0,6065 C_o$$
$$C = 60,65\% C_o$$

b) Combien de temps l'eau doit-elle rester dans le bassin si l'on ne la libère dans l'environnement que lorsque la concentration de polluants est inférieure à 5% de la quantité initiale?

$$C = C_o e^{-0,1t}$$
$$0,05 C_o = C_o e^{-0,1t}$$
$$0,05 = e^{-0,1t}$$
$$\ln 0,05 = -0,1t$$
$$t = 29,96 \text{ jours}$$

8. Une batterie consiste en un ensemble de piles électriques reliées entre elles. Lorsqu'une ou plusieurs piles d'une batterie n'ont pas la même charge, il se produit un déséquilibre entre celles-ci. La règle $T_1 = T_2 e^{-1,2x}$ détermine la tension T_1 (en V) de la pile (1) d'une batterie, selon la tension T_2 (en V) de la pile (2) et le temps x (en h).
a) la tension de la pile (1) est-elle croissante ou décroissante. Expliquez votre réponse.

$$T_1 = T_2 \left(e^{-1,2}\right)^x$$
$$T_1 = T_2 (0,30)^x$$

décroissante car 0,30 < 1

b) À quelle moment la tension de la pile (1) est-elle égale à :
1) la tension de la pile (2)?

$$T_1 = T_2 e^{-1,2x}$$
$$T_1 = T_1 e^{-1,2x}$$
$$1 = e^{-1,2x}$$
$$\ln 1 = -1,2x$$
$$x = 0$$

2) 75% de la tension de la pile (2)?

$$T_1 = 0,75 T_2$$
$$0,75 T_2 = T_2 e^{-1,2x}$$
$$0,75 = e^{-1,2x}$$
$$\ln 0,75 = -1,2x$$
$$x = 0,24 \text{ heure}$$

$$0,24 \text{ heures}$$
$$1 \text{ heure} = 60 \text{ min}$$
$$0,24 h = x$$
$$x = 14,4 \text{ min}$$

$$0,4 \text{ min}$$
$$1 \text{ min} = 60 \text{ sec}$$
$$0,4 \text{ min} = x$$
$$x = 24 \text{ sec}$$

Il faudra 14 min et 24 sec.

c) la batterie peut prendre feu si la tension d'une des piles excède le double de la tension de l'autre. À partir de quel moment y a-t-il un risque d'incendie?

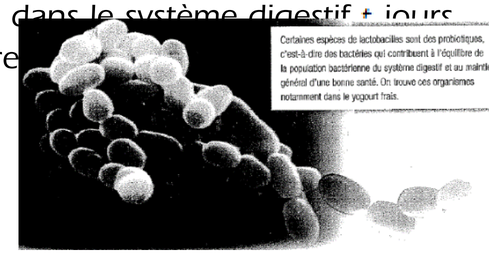
$$2T_1 = T_2$$
$$\frac{1}{2}T_2 = T_2 e^{-1,2x}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-1,2x}$$
$$\ln\tfrac{1}{2} = -1,2x$$
$$x = 0,58\text{heure}$$

$$0,58\text{heures} \qquad 1\text{heure} = 60\text{ min} \qquad 0,58h = x \qquad x = 34,8\text{ min}$$

$$0,8\text{ min} \qquad 1\text{ min} = 60\text{ sec} \qquad 0,8\text{ min} = x \qquad x = 48\text{ sec}$$

Il faudra 34 min et 48 sec.

9. Lorsqu'une personne prend des antibiotiques, la population bactérienne de son système digestif s'en trouve affectée. Dès la fin de la prise d'antibiotiques, la population de bactérie se met à évoluer jusqu'à ce qu'elle soit revenue à son niveau normal. Pour un traitement antibiotique de 10 jours, la fonction définie par partie $P(t)$ modélise le pourcentage de bactéries présentes dans le système digestif t jours après le début du traitement et ce, à chacune des phases de la re bactérienne. Les variables A et b sont deux constantes.


Certaines espèces de lactobacilles sont des probiotiques, c'est-à-dire des bactéries qui contribuent à l'équilibre de la population bactérienne du système digestif et au maintien général d'une bonne santé. On trouve ces organismes notamment dans le yogourt frais.

$$P(t) = \begin{cases} 100(0,9)^t & 0 \le t < 10 \\ Ae^{0,14(t-10)} & 10 \le t < b \\ 100 & t > b \end{cases}$$

Combien de temps après le début du traitement antibiotique la population bactérienne sera-t-elle revenue à la normale?

$$100(0,9)^{10} = Ae^{0,14(10-10)}$$
$$34,87 = A$$

$$34,87e^{0,14(t-10)} = 100$$
$$e^{0,14(t-10)} = 2,87$$
$$\ln 2,87 = 0,14(t-10)$$
$$7,52 = t-10$$
$$t = 17,52\text{ jours}$$

$$17,52\text{ jours} \qquad 1\text{ jour} = 24\text{heures} \qquad 0,52\text{ jour} = x \qquad x = 12,48\text{heures}$$

$$12,48\text{ heures} \qquad 1\text{heure} = 60\text{ min} \qquad 0,48\text{heure} = x \qquad x = 31,2\text{ min}$$

Après 17 jours 12heures 31 minutes.

10. Loi du refroidissement de Newton. Selon une loi de Newton, la différence entre la température d'un corps chaud et la température plus fraîche du milieu ambiant diminue exponentiellement. Pour déterminer le moment du décès d'une personne, par exemple, les policières et les policiers prennent la température du corps au moment de sa découverte, puis t min plus tard. Si T est la température du corps t min après sa découverte, alors $T - T_o = ae^{-kt}$, où T_o est la température de l'air ambiant et a et k sont des constantes liées au corps qui refroidit.

a) À 1h30, on découvre un corps dans la cave d'une maison. La température de la cave est de 10° C et la tempréature du corps au moment de la découverte est de 32°C. Après 90 minutes, la température du corps est de 28° C. Trouve les valeurs de a et de k.

$T = 32°C$
$T_o = 10°C$
$t = 0\,min$

$T - T_o = ae^{kt}$
$32 - 10 = ae^{k(0)}$
$22 = a$

$T = 28°C$
$T_o = 10°C$
$t = 90\,min$

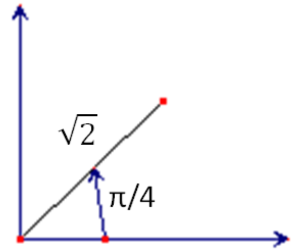
$T - T_o = 22e^{-kt}$
$28 - 10 = 22e^{-k(90)}$
$\frac{18}{22} = e^{-k(90)}$
$\ln\frac{18}{22} = -90k$
$k = 0,00223$

b) Étant donné que la température normale du corps humain est de 37°C, la valeur T est de 37°C au moment du décès. À partir de tes résultats en a) détermine l'heure approximative du décès. Quelle suposition as-tu faite?

$T - T_o = 22e^{-0,00223t}$
$37 - 10 = 22e^{-0,00223t}$
$\frac{27}{22} = e^{-0,00223t}$
$\ln\frac{27}{22} = -0,00223t$
$t = -91,84$

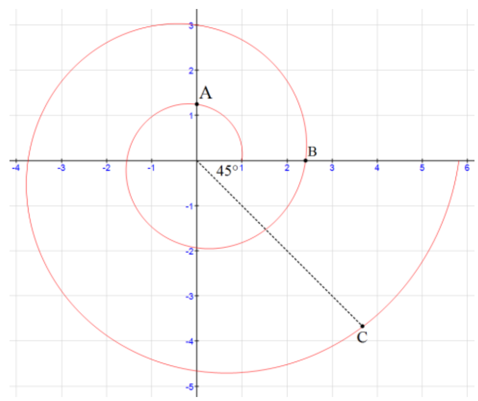
$91,84\,min = 1h31,84\,min$
$1\,min = 60\,sec$
$0,84\,min = x$
$x = 50\,sec$

$1h30 - 1h31\,min\,50s = 12h58\,min\,10\,sec$



11. Dans le plan cartésien, il est possible de présenter les coordonnées d'un point d'une autre façon qu'avec les déplacements sur l'axe des abscisses et des ordonnées (x, y), appelées les coordonnées cartésiennes. Un mode de représentation est à l'aide de la distance à partir de l'origine, r, et de l'angle θ mesuré en position standard, en radians. Ce mode de représentation est appelé coordonnées polaires. Ainsi, les coordonnées polaires équivalentes aux coordonnées cartésiennes (1, 1) sont $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ tel qu'illustré dans la figure ci-contre.

En coordonnées polaires, on peut construire une fonction nommée spirale logarithmique, dont la représentation graphique est ci-dessous. La règle de cette fonction est $r = e^{0,14\theta}$. Détermine les coordonnées polaires des points A, B et C.



A

$r = e^{0,14\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1,246$

$\left(1,246, \frac{\pi}{2}\right)$

B

$r = e^{0,14(2\pi)} = 2,41$

$\left(2,41; \frac{\pi}{2}\right)$

C

$r = e^{0,14\left(\frac{15\pi}{4}\right)} = 5,20$

$\left(5,20; \frac{15\pi}{4}\right)$