Mathématiques 30231BC

Bloc 3

Traitement des données et probabilités

6 – Recueillir et traiter des données statistiques pour faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

6.2 Utiliser l'espérance mathématiques afin de prendre des décisions, élaborer et analyser des stratégies.

- Calcul et interprétation de l'espérance mathématique

L'espérance mathématique permet de déterminer les gains (ou les pertes) associés à un événement lié au hasard. Elle correspond au produit du gain ou de la perte lié à un événement avec la probabilité que cet évènement se produise et en additionnant chacun de ces produits pour l'ensemble des événements possibles.

Lorsque l'espérance mathématique d'une situation de hasard est nulle, on dit que cette situation soit équitable.

Une espérance mathématique positive apportera un gain alors qu'une espérance mathématique négative occasionnera une perte.

Exemple : un commerçant décide de vendre des sacs à surprises à 10$. La valeur des produits de 5 de ces sacs est de 20$ et 20 de ces sacs contiennent l'équivalent de 7$. Cette situation n'est pas équitable et défavorise le consommateur étant donné que :

$$\begin{aligned} E(x) &= 20\$ \times P(\text{choisir un sac qui vaut } 20\$) + 7\$ \times P(\text{choisir un sac qui vaut } 7\$) \\ &= 20 \times \frac{5}{25} + 7 \times \frac{20}{25} = 9{,}60\$ \end{aligned}$$

Puisqu'il faut débourser 10$ pour acheter un sac à surprises, cette situation occasionnera, en moyenne, une perte de 0,40$.

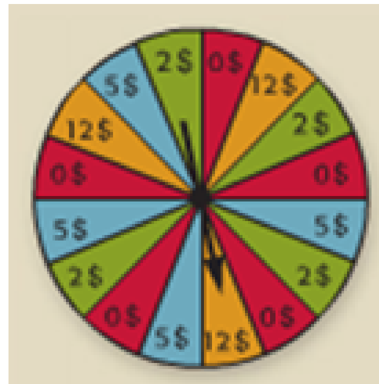
La moyenne pondérée, qui est la façon dont vos enseignants calculent vos notes est semblables à l'espérance mathématique.

Exemple :

Un élève estime qu'il aura une note de 67% pour son bloc 1 qui vaut 25% de la note finale, 58% pour son 2e bloc qui vaut 30% et 61% pour le 3e bloc qui vaut 45%. Il veut connaître l'espérance mathématique de son résultat final.

$E = 0,25 \times 0,67 + 0,30 \times 0,58 + 0,45 \times 0,61 = 0,616$

Ce qui lui donne 61,6% comme note finale.



Exemple :

Résultats possibles	0 \$	2 \$	5 \$	12 \$
Probabilité	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$

Donc,

Espérance mathématique $= 0 \times \frac{5}{16} + 2 \times \frac{4}{16} + 5 \times \frac{4}{16} + 12 \times \frac{3}{16}$

$= \frac{0 + 8 + 20 + 36}{16} = 4\$$

L'espérance mathématique de cette roulette est de 4 \$
Donc on peut s'attendre à gagner en moyenne 4 \$ chaque fois qu'on la fait tourner.

On note l'espérance mathématique par la lettre E. Exemple E(roulette)
Dans une espérance mathématique le jeu est :

- Favorable au joueur si l'espérance mathématique est positive
- Défavorable au joueur si l'espérance mathématique est négative
- Equitable si l'espérance mathématique est nulle

Calcul de l'espérance mathématique d'un jeu

Si on doit payer 5 \$ pour faire tourner la roulette.
Pour calculer l'espérance mathématique du jeu on soustraire le prix à payer de l'espérance mathématique de la roulette.

$E(\text{roulette}) = 5\$ - 4\$ = 1\$$

Exercices :

1. Pour chacune des situations suivantes, calculez l'espérance mathématique.

a)
$\Omega = \{6, 8, 10, 12\}$
$P(6) = 20\%$
$P(8) = 30\%$
$P(10) = 35\%$
$P(12) = 15\%$

b)
$\Omega = \{-2, 0, 0.5, 1, 5\}$
$P(-2) = \frac{1}{4}$
$P(0) = \frac{1}{8}$
$P(0.5) = \frac{3}{8}$
$P(1) = \frac{1}{8}$
$P(5) = \frac{1}{8}$

$$E(\Omega) = 0,2 \times 6 + 0,3 \times 8 + 0,35 \times 10 + 0,15 \times 12$$
$$= 8,9$$

$$E(\Omega) = \frac{1}{4} \times (-2) + \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 0,5 + \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 5$$
$$= 0,4375$$

2. Dans chaque cas, déterminez la valeur de x pour laquelle l'espérance mathématique est nulle.

a)
$\Omega = \{1, -2, x, 15\}$
$P(1) = 15\%$
$P(-2) = 25\%$
$P(x) = 25\%$
$P(15) = 35\%$

$$E(\Omega) = 0,15 \times 1 + 0,25 \times (-2) + 0,25 \times x + 0,35 \times 15$$
$$0,15 - 0,5 + 0,25x + 5,25 = 0$$
$$0,25x = -4,9$$
$$x = -19,6$$

b)

Ω	Probabilité (%)
25	15
15	20
x	15
-10	50

$$E(\Omega) = 25 \times 15\% + 15 \times 20\% + x \times 15\% - 10 \times 25\%$$
$$0 = 4,25 + 0,15x$$
$$-4,25 = 0,15x$$
$$x = -28,33$$

c)

Ω	Probabilité (%)
3	20
x	y
15	8
-5	30
28,78	5

$$E(\Omega) = 3 \times 20\% + x \times 37\% + 15 \times 8\% - 5 \times 30\% + 28,78 \times 5\%$$
$$0 = 1,739 + 0,37x$$
$$-1,739 = 0,37x$$
$$x = 4,7$$

3. Lors d'un test, 8% des participants ont obtenu 1 sur 5, 14% ont obtenu 2 sur 5, 26% ont obtenu 3 sur 5, 35% ont obtenu 4 sur 5 et 18% ont obtenu 5 sur 5. Quelle est l'espérance mathématique de cette situation?

$$E(\Omega) = \frac{1}{5} \times 8\% + \frac{2}{5} \times 14\% + \frac{3}{5} \times 26\% + \frac{4}{5} \times 35\% + \frac{5}{5} \times 18\% = 0,688 = 68,8\%$$
$$=$$

4. On se donne un jeu de hasard tel qu'à chaque partie, on ait la probabilité
   - 0,2 de perdre 2$
   - 0,3 de perdre 1$
   - 0,1 de ne rien perdre ni gagner
   - 0,2 de gagner 1$
   - 0,2 de gagner 2$

   Quel est le gain moyen par partie?

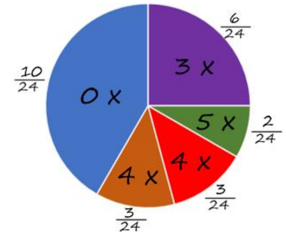
$$E(\Omega) = -2\times 0{,}2 - 1\times 0{,}3 + 0\times 0{,}1 + 1\times 0{,}2 + 2\times 0{,}2 = -0{,}1 = -10\%$$

5. Au Casino « Gagne ou perd », le joueur débourse 2$ pour rouler un dé à six faces numéroté de 1 à 6. Si tu roules un 1, 2 ou 3, tu reçois 1$, si tu roules 4 ou 5, tu reçois 2$ mais si tu roules le 6, tu reçois 6$. Quel est le profit de ce jeu?

$$E(\Omega) = 1\times\frac{3}{6} + 2\times\frac{2}{6} + 6\times\frac{1}{6} - 2 = 0{,}67\$$$

6. Un jeu consiste à tourner une roulette. La mise initiale à ce jeu est de 2$. Les prix à gagner sont : si la roulette s'arrête sur la partie

	Rouge	Orange	Mauve	Verte	Bleue
Remporte	4 fois sa mise	4 fois sa mise	3 fois sa mise	5 fois sa mise	0$



Les probabilités pour chacune des couleurs sont inscrites sur le dessin.
Ce jeu est-il équitable ?

$$E(\Omega) = 0\times\frac{10}{24} + 6\times\frac{6}{24} + 10\times\frac{2}{24} + 8\times\frac{6}{24} + 8\times\frac{6}{24} - 2 = 4{,}33\$$$

Non, il est avantageux pour le joueur.

7. Pour financer le conseil étudiant, des élèves décident d'organiser un tirage afin de distribuer différents prix. Pour participer, tu dois débourser 1$ puis, tirer une boule dans un boulier qui en contient 150. Voici les différents messages qu'il est possible de piger.
   - Une semaine de repas gratuit à la cafétéria d'une valeur de 25$
   - Un remboursement complet des frais du voyage de fin d'année
   - Essaie une nouvelle fois (148 boules)

   Quel devrait être le montant du voyage de fin d'année afin que le tirage soit équitable ?

$$E(\Omega) = 25\times\frac{1}{150} + x\times\frac{1}{150} + 0\times\frac{148}{150} - 1 = 0$$
$$25 + x - 150 = 0$$
$$x = 125\$$$

8. Supposons que tu joues à un simple jeu dans le cadre duquel tu recevras 3$ si tu lances un 5 à l'aide d'un dé à cinq côtés. Si chaque lancer coûte 1$, le jeu présente-t-il un risque financier équitable?

$$E(\Omega) = 3\times\frac{1}{5} + 0\times\frac{4}{5} - 1 = -0{,}40\$$$ Non, tu risques plus de perdre.

9. Marie paye 1$ pour piger un canard en plastique d'un bassin. Si le canard est muni d'un collant rouge, elle gagnera 10$. Si 260 canards se trouvent sur le bassin et que seulement 13 d'entre eux portent un collant rouge, quelle est l'espérance mathématique? Si Marie joue à 10 reprises, combien d'argent peut-elle probablement gagner ou perdre?

$$E(\Omega) = 10 \times \frac{13}{260} + 0 \times \frac{247}{260} - 1 = -0,50\$$$

Après 10 essaies, elle devrait perdre 5$.

10. Hélène fait un examen qui comporte 100 questions à choix multiple ayant 4 choix de réponses possibles chacune. Elle connaît 64 réponses et choisit au hasard pour les 32 autres questions. Calcule le nombre de bonnes réponses.

$E(\Omega) = 64 \times \frac{1}{1} + 32 \times \frac{1}{4} = 72$ Elle pourrait avoir 72 bonnes réponses.

11. Il est possible de jouer à « Piger une bille » au coût de 2$. Ce jeu consiste à choisir une bille au hasard d'un sac comptant 4 billes rouges, 1 bille noire et 5 billes blanches. Si la bille que tu choisis est rouge, tu gagnes 5$ et si elle est noire, tu gagnes 10$. Toutefois, tu ne gagnes rien si la bille est blanche. Détermine l'espérance mathématiques de ce jeu. Si tu y joue à 20 reprises quels seraient tes gains ou tes pertes prévus?

$E(\Omega) = 5 \times \frac{4}{10} + 10 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{5}{10} - 2 = 1\$$ Tu pourrais gagner 20$

12. Un organisme de bienfaisance offre à des participants la chance de jouer à un jeu à l'occasion d'un carnaval d'été. Il faut débourser 2$ pour jouer. Ce jeu consiste à choisir une bille d'un sac comptant 3 billes rouges, 2 billes bleues et 5 billes vertes. Tu gagnes 1$ pour une bille verte, 2$ pour une bille rouge et 3$ pour une bille bleue. L'organise estime que 1000 personnes participent au jeu. Combien d'argent peut-il récolter?

$$E(\Omega) = 1 \times \frac{5}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} - 2 = -0,30$$

$$1000 \times 0,30 = 300\$$$

13. Un groupe communautaire fait tirer un téléviseur grand écran d'une valeur de 1500$. Chaque billet coût 5$; 2500 billets ont été vendus. Quelle est l'espérance mathématique si tu as acheté un billet? Quelle est l'espérance mathématique si tu achètes cinq billets?

$E(\Omega) = 1500 \times \frac{1}{2500} - 5 = -4,40\$$ $E(\Omega) = 1500 \times \frac{5}{2500} - 5 = -2\$$