# Mathématiques 30231BC

## Bloc 4

## Traitement des données et probabilités

6 – Recueillir et traiter des données statistiques pour faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

6.1 Résoudre des problèmes en utilisant des probabilités

- Calcul de probabilités
  - Événement dépendants et indépendants
  - Événements compatibles et incompatibles
  - Événements complémentaires

6.2 Utiliser l'espérance mathématiques afin de prendre des décisions, élaborer et analyser des stratégies.

- Calcul et interprétation de l'espérance mathématique

Rappels :
Une **expérience aléatoire** est une expérience qui relève totalement du hasard. On ne peut pas prévoir avec certitude le résultat.

**L'univers des résultats**, noté $\Omega = \{ \qquad \}$, est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience.

La **probabilité** d'un résultat, P(A), est le nombre de résultats où la condition A peut arriver divisé par le nombre de résultats possibles.

**Événements complémentaires** : lorsque deux événements se complètent pour former 100% de l'univers des résultats. Ex : les nombres pairs et les nombres impairs, les consonnes et les voyelles.

**Événements compatibles** : lorsque deux événements ont un ou plusieurs résultats en commun, il est possibles qu'ils se réalisent en même temps. Ex : piger un 2 et un nombre pair.

**Evénements incompatibles** : lorsque deux événements n'ont aucun résultat en commun, il est impossible qu'ils se réalisent en même temps. Ex : piger un 3 et un nombre pair.

**Evénements dépendants** : lorsque le résultat obtenu lors de la première étape influence la probabilité de réalisation de l'autre.

**Événements indépendants** : lorsque le résultat obtenu lors de la première étape n'influence pas la probabilité de réalisation de l'autre.

Exercices :

1. Combien y a-t-il de façons d'écrire un nombre de 4 chiffres en utilisant les chiffres de 0 à 9 :
   a) Si on peut répéter le même chiffre dans le même nombre ?

      $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

   b) Si on ne peut pas répéter le même chiffre dans le même nombre ?

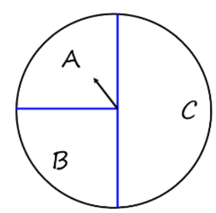
      $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

2. Jeanne doit choisir une tenue pour se présenter à une entrevue en vue d'obtenir un emploi. Elle dispose de 3 pantalons (un bleu, un noir et un beige), de 4 blouses (une blanche, une verte, une jaune et une noire) et de 2 vestes (une bleue et une blanche). De combien de façons peut-elle s'habiller ?

   $3 \times 4 \times 2 = 24$

3. On tire successivement 2 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de résultats possibles si :
   a) On tire sans remise ? $52 \times 51 = 2652$
   b) On tire avec remise ? $52 \times 52 = 2704$

4. On fait tourner la roulette ci-contre et on note la lettre où le pointeur s'immobilisera.



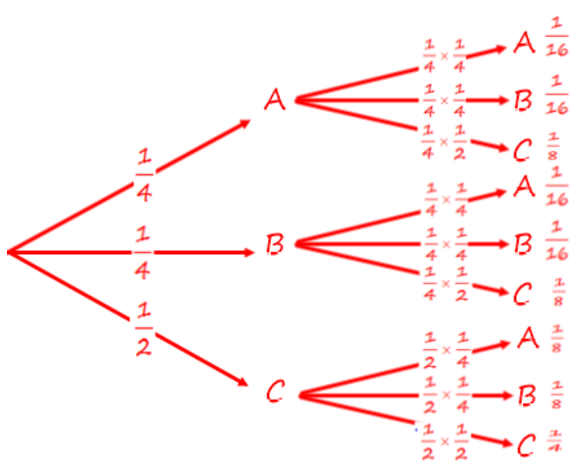

   a) Décris l'univers des résultats possibles de cette expérience.

      $\{A, B, C\}$

   b) Chaque lettre a-t-elle la même chance que les autres d'être pointée ?

      non

   c) On fait tourner 2 fois cette même roulette. Construis l'arbre des résultats.




   d) Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre C au premier tour et la lettre C au deuxième tour ?

$$P(C \text{ et } C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

5. On pige aléatoirement une carte d'un jeu de 52 cartes.

   a) Quelle est la probabilité de tirer un 5 ?

   $$P(5) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

   b) Quelle est la probabilité de tirer un roi ?

   $$P(K) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

   c) Quelle est la probabilité de tirer une carte de pique ?

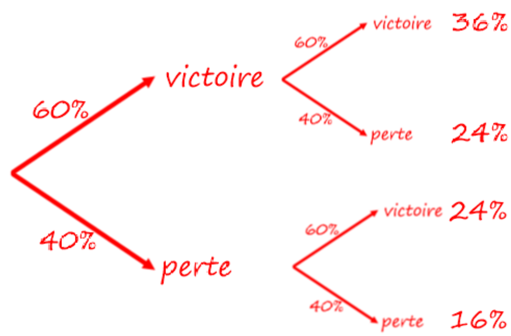
   $$P(pique) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

   d) Quelle est la probabilité de tirer une carte rouge ?

   $$P(rouge) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

6. Nadia gagne 60% des parties de tennis qu'elle joue. Elle participe à la finale du tournoi de tennis à son école et doit jouer 2 parties en finale.

   a) Construis l'arbre de probabilité.




   b) Quelle est la probabilité que Nadia gagne les deux matchs ?

   $$P(victoire, victoire) = 36\%$$

7. On lance deux fois un dé numéroté de 1 à 6.

   a) Décris l'univers des résultats.

   $$\left\{\begin{array}{l} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6) \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array}\right\}$$

   b) Quelle est la probabilité d'obtenir un 2 au premier lancer et un 3 au deuxième lancer ?

   $$P(2,3) = \frac{1}{36}$$

   c) Quelle est la probabilité d'obtenir un 2 au premier lancer ou un 3 au deuxième lancer ?

   $$P(2 \text{ ou } 3) = P(2) + P(3) - P(2 \text{ et } 3) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

   d) Quel résultat entre la b) et la c) est plus grand ? c

8. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, l'ensemble des résultats possibles lorsqu'on lance un dé une fois.

   A l'aide d'un énoncé, décris un événement complémentaire à chacun des événements suivants.

   a) A : obtenir un chiffre pair – A′ : obtenir un chiffre impair

   b) B : obtenir un chiffre supérieur ou égal à 3 – B′ : obtenir un chiffre inférieur à 3

9. Une tirelire renferme 8 pièces de 1$, 5 pièces de 0,25$, 4 pièces de 0,10$ et 3 pièces de 0,05$. On pige au hasard une pièce de cette tirelire.

   a) Calcule la probabilité de piger une pièce de 1$.

   $$P(1\$) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

   b) Calcule la probabilité de piger une pièce de 1$ ou une pièce de 0,25$.

   $$P(1\$ \text{ ou } 0{,}25\$) = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} - \frac{0}{20} = \frac{13}{20}$$

10. On lance une pièce de monnaie deux fois.

    a) Quelle est la probabilité d'obtenir Face-Face ?

    $$P(F \text{ et } F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

    b) Quelle est la probabilité d'obtenir Face-Face ou Pile-Pile ?

    $$P((F \text{ et } F) \text{ ou } (P \text{ et } P)) \text{ ou } = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

11. Dans le lancer d'un dé truqué, P(5) = $^1/_3$ et P(3) = ¼. Quelle est la probabilité d'obtenir un 5 ou un 3 ?

    $$P(5 \text{ ou } 3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

12. Les énoncés suivants sont-ils vrai ou faux ?

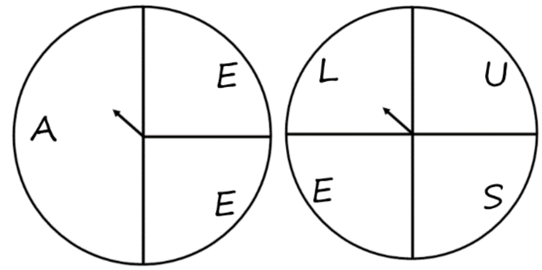
    a) Si A′ est l'événements sont complémentaire de l'événement A, alors P{A} + P{A′}=1.vrai

    b) Si deux événements sont complémentaires, alors ils sont compatibles. faux

    c) Quand deux événements sont incompatibles, la somme de leurs probabilités est égale à 1. faux

    d) Deux événements compatibles n'ont aucun résultat en commun. Faux

13. On fait tourner une fois les deux roulettes suivantes. Quelle est la probabilité d'observer la lettre E au moins une fois dans cette expérience ?




$P(E_1)$ ou $P(E_2)$ ou $P(E_1$ ou $E_2) = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

14. On choisit au hasard un chiffre du nombre 6893512.

a) Décrire l'espace échantillonal.

$\Omega = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

b) Si nous voulons que le chiffre choisi soit un nombre impair, décrire l'ensemble des résultats favorables.

$Im\,p = \{1, 3, 5, 9\}$

c) Quelle est la probabilité que le chiffre choisi soit un nombre impair ?

$P(imp) = \frac{4}{7}$

d) Quelle est la probabilité que le chiffre choisi soit un nombre pair ?

$P(pair) = \frac{3}{7}$

15. On choisit une lettre au hasard du mot STATISTIQUES :

a) Trouver la probabilité que la lettre soit une voyelle.

$P(voyelle) = \frac{5}{12}$

b) Trouver la probabilité que la lettre soit un « S ».

$P(s) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

16. Une boite contient 8 billes vertes, 12 blanches et 4 bleues. Vous devez tirer une bille au hasard. Trouver la probabilité de tirer une bille qui :

a) Soit verte ;

$P(verte) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

b) Ne soit pas blanche ;

$P(pas\ blanche) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

c) Soit verte ou rouge.

$P(verte\ ou\ rouge) = \frac{8}{24} + \frac{4}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

17. On a vendu 25000 billets de loterie et Jeanne en a acheté un. Il y a 10 prix à gagner. Quelle est la probabilité que Jeanne gagne :

a) Un prix ?

$$P(1)=\frac{10}{25000}=\frac{1}{2500}$$

b) Le premier prix ?

$$P(1er)=\frac{1}{25000}$$

c) Le premier ou le deuxième prix ?

$$P(1 \text{ ou } 2)=\frac{2}{25000}=\frac{1}{12500}$$

18. On choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 40 inclusivement. Quelle est la probabilité que le nombre entier soit :

a) Impair ?

$$P(imp)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$$

b) Inférieur à 9 ?

$$P(<9)=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$$

c) Divisible par 4 ?

$$P(\div 4)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

d) Se termine par un 6 ?

$$P(\_6)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$$

19. Parmi les paires d'événements suivants, lesquels sont incompatibles ?

a) Tirer une bille verte et tirer une bille blanche ;

b) Avoir les yeux bleus et des cheveux noirs ; x

c) Tirer un as de pique et tirer un valet ;

d) Tirer un as de pique et tirer un trèfle ; x

e) Vivre à Ottawa et vivre en Nouvelle-Écosse ; x

f) Vivre à Vancouver et vivre en Colombie-Britannique ;

g) Choisir un nombre pair et choisir un nombre premier. X

20. On fait rouler deux dés. Quelle est la probabilité que le résultat du total soit :

a) Supérieur à 8 ?

$$P(>8)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

b) Inférieur à 8 ?

$$P(<8)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

c) Un nombre premier ?

$$P(premier)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

21. On choisit 2 lettres dans l'alphabet au hasard, trouve la probabilité que :

a) Les deux sont des voyelles ;

$$P(deux\ voyelles)=\frac{6}{26}\times\frac{5}{25}=\frac{3}{65}$$

b) Que la première lettre soit une voyelle et que la deuxième soit une consonne.

$$P(voyelle\ et\ consonne)=\frac{6}{26}\times\frac{20}{26}=\frac{30}{169}$$

22. Dans chaque cas, déterminez la valeur de x pour laquelle l'espérance mathématique est nulle.

a) $\Omega=\{-450,x,25,50,100\}$

$P(-450)=0,1$
$P(x)=0,2$
$P(25)=0,4$
$P(50)=0,2$
$P(100)=0,1$

$$E(\Omega)=-450(0,1)+x(0,2)+25(0,4)+50(0,2)+100(0,1)=0$$
$$0,2x=-15$$
$$x=-75$$

b)

| $\Omega$ | Probabilité (%) |
|---|---|
| x | 15 |
| 12 | 35 |
| -10 | 25 |
| 2 | 15 |
| 10 | 10 |

$$E(\Omega)=x(0,15)+12(0,35)-10(0,25)+2(0,15)+10(0,1)=0$$
$$0,15x=-3$$
$$x=-20$$

23. Jordan offre le pari suivant à Geneviève : Pige une carte dans ce jeu de 52 cartes. Si tu piges un as, je te donne 5$. Si tu tires une figure, je te donne 2$. Si tu piges une autre carte, tu me donnes 1,50$. Calcul l'espérance mathématique afin d'aider Geneviève a décider si elle doit accepter le pari proposé par Jordan ?

$$E(\Omega)=5\left(\frac{4}{52}\right)+2\left(\frac{12}{52}\right)-1,5\left(\frac{36}{52}\right)=-0,19\$\ \text{elle doit refuser.}$$

24. Certaines personnes dépensent beaucoup d'argent sur la loterie vidéo. Tu constates que la machine sur laquelle tu joues a un décaissement de 8000$ et que quelqu'un devrait y gagner 0,01% du temps. S'il faut débourser 1$ pour chaque partie, détermine :

a) l'espérance mathématique de cette machine;

$$E(\Omega)=8000(0,01\%)-1=-0,20\$$$

b) s'il s'agit d'un jeu équitable. *Non, il n'est pas équitable.*