Mathématiques 30231BC

Bloc 4

Géométrie et mesures

4 – Démontrer une compréhension des formes géométriques pour interpréter les structures du monde réel et pour en créer de nouvelles.

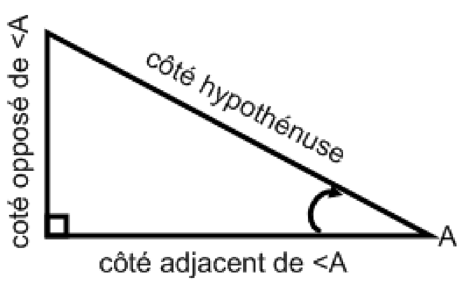
5 – Utiliser la mesure pour décrire et comparer des phénomènes du monde réel.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

5.2 Modéliser des situations à l'aide de triangles quelconques pour résoudre des problèmes,

- Relations entre les angles et les côtés des triangles
- Mesures manquantes de triangles
  - Loi du sinus
  - Loi du cosinus
  - Périmètre
  - Aire

Nous avons travaillé avec les rapports trigonométriques de bases qu'on utilise pour résoudre des rapports dans des triangles rectangles.



$$\sin A = \frac{\text{côté opposé à } \measuredangle A}{\text{côté hyphothénuse}} = \frac{opp}{hyp}$$

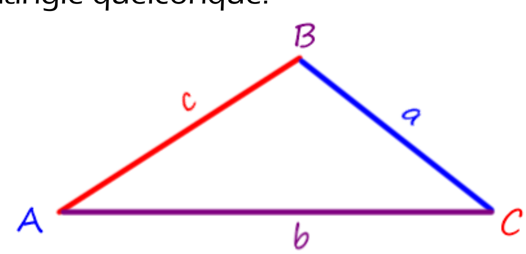
$$\cos A = \frac{\text{côté adjacent de } \measuredangle A}{\text{côté hypothénuse}} = \frac{adj}{hyp}$$

$$\tan A = \frac{\text{côté opposé de } \measuredangle A}{\text{côté adjacent de } \measuredangle A} = \frac{opp}{adj}$$

Lorsque le triangle n'a pas un angle de 90°, on ne peut pas se servir des rapports de base, il existe deux lois qui nous permet de résoudre ces triangles.

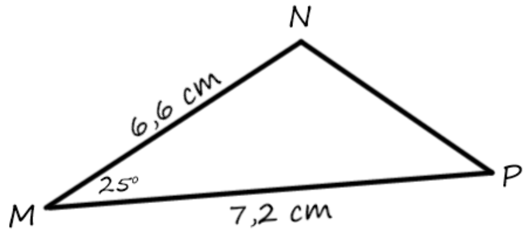
Loi des cosinus - est une généralisation de la relation de Pythagore aux triangles quelconques. Elle permet de trouver la mesure d'un côté ou d'un angle dans un triangle quelconque.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \operatorname{Cos} B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos} C$$



On se sert de la loi des cosinus dans deux situations :

- Où on connait les mesures de deux côtés et de l'angle qu'ils forment, ce qui nous permet de trouver le troisième côté.



$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2(MN)(MP)\cos M^o$

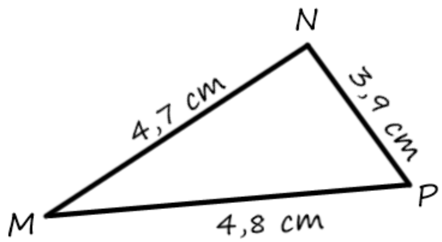
$NP^2 = 6,6^2 + 7,2^2 - 2(6,6)(7,2)\cos 25^o$

$NP^2 = 43,56 + 51,84 - 95,04(0,9063)$

$NP^2 = 95,4 - 86,13 = 9,27$

$NP = 3,04\ cm$

- Lorsqu'on connaît les mesures des trois côtés, ce qui permet de trouver la mesure d'un angle.



$MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2(MN)(NP)\cos N^o$

$4,8^2 = 6,6^2 + 3,9^2 - 2(6,6)(3,9)\cos N^o$

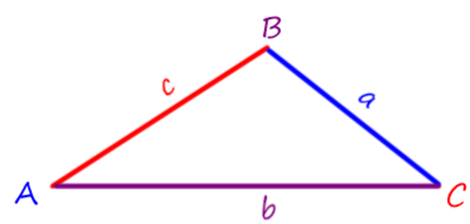
$23,04 = 43,56 + 15,21 - 51,48\cos N^o$

$-35,73 = -51,48\cos N^o$

$0,6941 = \cos N^o$

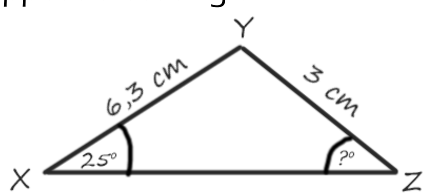
$\measuredangle N = 46,0^o$

Loi des sinus – est une formule qui établit un lien entre les rapports des sinus des angles et les mesures de leurs côtés opposés. Pour ce faire, il faut connaître la mesure d'un angle, de son côté opposé et d'un autre côté ou d'un autre angle. (toutes les autres situations sauf les deux mentionnées dans la loi des cosinus)



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

- Lorsqu'on cherche un angle et qu'on connaît le côté opposé à cet angle.



$$\frac{\sin X}{x} = \frac{\sin Z}{z}$$

$$\frac{\sin 25^\circ}{3} = \frac{\sin Z}{6,3}$$

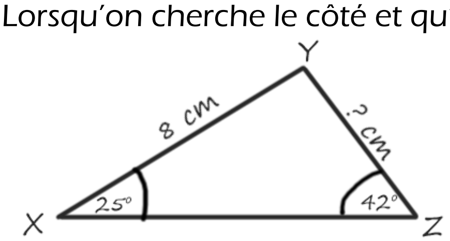
$$0,4226 \times 6,3 = 3\sin Z$$

$$2,6624 = 3\sin Z$$

$$\sin Z = \frac{2,6624}{3} = 0,8875$$

$$\measuredangle Z = 62,6^o$$

- Lorsqu'on cherche le côté et qu'on connaît l'angle opposé à ce côté.



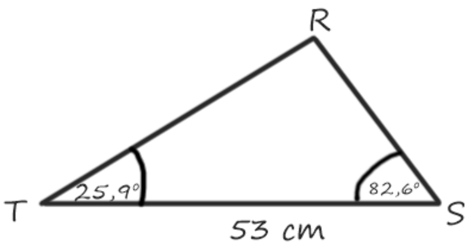
$$\frac{\sin 25^o}{YZ} = \frac{\sin 42^o}{8}$$

$$0,4226 \times 8 = 0,6691YZ$$

$$YZ = \frac{0,4226 \times 8}{0,6691} = 5,1\ cm$$

Exemple :

Détermine le périmètre et l'aire du ΔRST.



$\measuredangle R = 180 - 25,9 - 82,6 = 71,5°$

$\dfrac{\sin 71,5°}{53} = \dfrac{\sin 25,9°}{RS}$

$RS = 24,4 \text{ cm}$

$\dfrac{\sin 71,5°}{53} = \dfrac{\sin 82,6°}{RT}$

$RT = 55,4 \text{ cm}$

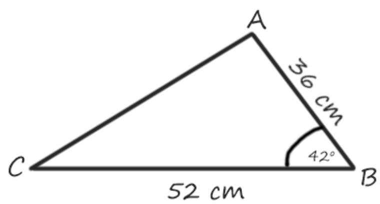
$\sin 25,9° = \dfrac{h_\Delta}{55,4}$

$h_\Delta = 24,2 \text{ cm}$

$A_\Delta = \dfrac{bh}{2} = \dfrac{53 \times 24,2}{2}$

$= 641,3 \text{ cm}^2$

Détermine le périmètre et l'aire du ΔABC



$AC^2 = 52^2 + 36^2 - 2(52)(36)\cos 42°$

$AC^2 = 1217,7$

$AC = 34,9 \text{ cm}$

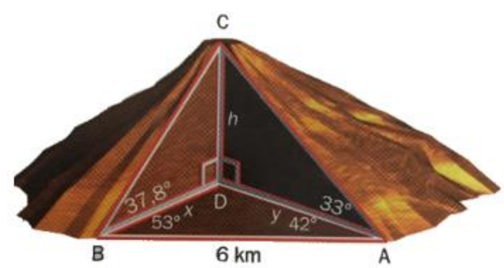
$\sin 42° = \dfrac{h_\Delta}{36}$

$h_\Delta = 24,1$

$A_\Delta = \dfrac{bh}{2} = \dfrac{52 \times 24,1}{2}$

$= 626,6 \text{ cm}^2$

Exemple : Hauteur du Mauna Kea. Le schéma ci-dessous montre les mesures qu'un arpenteur a utilisées pour calculer la hauteur du Mauna Kea.



a) Trouve h au mètre près.

$\measuredangle D = 180 - 53 - 42 = 85°$

$\dfrac{\sin 85°}{6} = \dfrac{\sin 42°}{x}$

$x = 4,0 \text{ km}$

$\tan 37,8° = \dfrac{h}{4}$

$h = 3,103 \text{ km} = 3103 \text{ m}$

b) S'il l'altitude des points A, B et D est de 1077 m, quelle est la hauteur du Mauna Kea?

$1077 + 3103 = 4180 \text{ m}$

Omnimath 10 p. 347 # 1 à 15 impair, 18

Omnimath 10 p. 352 # 1 à 15 impair, 18

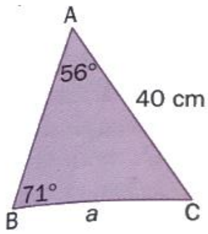
Omnimath 10 p. 356 #12 à 31

Mathématiques 30231BC

Omnimath 10 p. 347 # 1 à 15 impair, 18

Trouve la longueur du côté indiqué, au dixième près.

1.

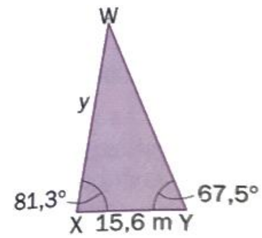


$$\frac{\sin 71^\circ}{40} = \frac{\sin 56^\circ}{a}$$

$$0,9455a = 0,8290 \times 40$$

$$a = 35,1\ \text{cm}$$

3.



$$\measuredangle W = 180 - 81,3 - 67,5$$

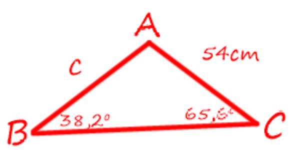
$$\measuredangle W = 31,2^\circ$$

$$\frac{\sin 31,2^\circ}{15,6} = \frac{\sin 67,5^\circ}{y}$$

$$0,5180y = 0,9239 \times 15,6$$

$$y = 27,8\ \text{m}$$

5. Dans le $\triangle ABC$, $\measuredangle B = 38,2^\circ$, $\measuredangle C = 65,6^\circ$ et $b = 54$ cm. Trouve c.

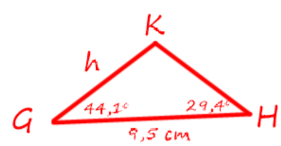


$$\frac{\sin 38,2^\circ}{54} = \frac{\sin 65,6^\circ}{c}$$

$$0,6184c = 0,9107 \times 54$$

$$c = 79,5\ \text{cm}$$

7. Dans le $\triangle GHK$, $\measuredangle G = 44,1^\circ$, $k = 9,5$ cm et $\measuredangle H = 29,4^\circ$. Trouve h.



$$\measuredangle K = 180 - 44,1 - 29,4$$

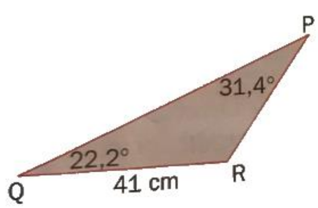
$$\measuredangle K = 106,5^\circ$$

$$\frac{\sin 106,5^\circ}{9,5} = \frac{\sin 29,4^\circ}{h}$$

$$0,9588h = 0,4909 \times 9,5$$

$$h = 4,9\ \text{cm}$$

9. Résous



$$\measuredangle R = 180 - 22,2 - 31,4$$

$$\measuredangle R = 126,4^\circ$$

$$\frac{\sin 31,4^\circ}{41} = \frac{\sin 22,2^\circ}{q}$$

$$0,5210q = 0,3778 \times 41$$

$$q = 29,7\ \text{cm}$$

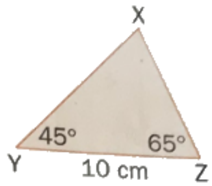
$$\frac{\sin 31,4^\circ}{41} = \frac{\sin 126,4^\circ}{r}$$

$$0,5210r = 0,8049 \times 41$$

$$r = 63,3\ \text{cm}$$

Trouve l'aire de chaque triangle, à l'unité carrée près.

11.



$\measuredangle X = 180 - 45 - 65$

$\measuredangle X = 70°$

$$\frac{\sin 70°}{10} = \frac{\sin 65°}{z}$$

$0{,}9397z = 0{,}9063 \times 10$

$z = 9{,}6 \text{ cm}$

$$\sin 45° = \frac{\text{hauteur}}{9{,}6}$$

$\text{hauteur} = 6{,}8 \text{ cm}$

$$\text{Aire}_\Delta = \frac{bh}{2} = \frac{10 \times 6{,}8}{2} = 34 \text{ cm}^2$$

13.

$\measuredangle G = 180 - 82{,}3 - 48{,}1$

$\measuredangle G = 49{,}6°$

$$\frac{\sin 49{,}6°}{20} = \frac{\sin 48{,}1°}{e}$$

$0{,}7615e = 0{,}7443 \times 20$

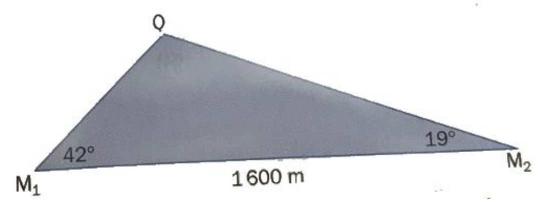
$e = 19{,}5 \text{ cm}$

$$\sin 82{,}3° = \frac{\text{hauteur}}{20}$$

$\text{hauteur} = 19{,}8 \text{ cm}$

$$\text{Aire}_\Delta = \frac{bh}{2} = \frac{19{,}5 \times 19{,}8}{2} = 193{,}1 \text{ cm}^2$$

15. Nil – à Thèbes, il y a deux musées du même côté du Nil. Ces musées se trouvent sur la rive du fleuve et sont distants de 1600 m. De l'autre côté du fleuve, il y a un quai pour les deux traversiers qui emmènent les touristes jusqu'aux musées. Voici les angles formés par la rive et les droites tracées depuis les musées jusqu'aux quai, Q.



a) Quelle distance sépare chaque musée du quai, au mètre près?

$\measuredangle Q = 180 - 42 - 19$

$\measuredangle Q = 119°$

$$\frac{\sin 119°}{1600} = \frac{\sin 19°}{m_2}$$

$0{,}8746m_2 = 0{,}3256 \times 1600$

$m_2 = 596 \text{ m}$

$$\frac{\sin 119°}{1600} = \frac{\sin 42°}{m_1}$$

$0{,}8746m_1 = 0{,}6691 \times 1600$

$m_1 = 1224 \text{ m}$

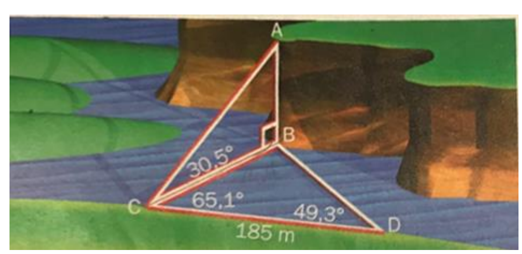
b) Quelle est la largeur de cette partie du Nil, au mètre près?

$$\sin 42° = \frac{\text{hauteur}}{596}$$

$\text{hauteur} = 399 \text{ m}$

18. Falaise inaccessible – Pour déterminer la hauteur, AB, d'une falaise inaccessible, un arpenteur note les données ci-dessous.

Détermine la hauteur de la falaise, au mètre près.



$$\frac{\sin 65{,}6°}{185} = \frac{\sin 49{,}3°}{d}$$

$0{,}9107d = 0{,}7581 \times 185$

$d = 154 \text{ m}$

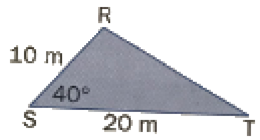
$$\tan 30{,}5° = \frac{AB}{154}$$

$AB = 91 \text{ m}$

Omnimath 10 p. 352 # 1 à 15 impair, 18

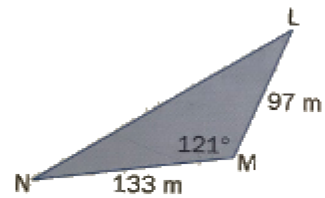
Trouve la longueur manquante, au dixième d'unité près.

1.



$$s^2 = 10^2 + 20^2 - 2(10)(20)\cos 40^\circ$$
$$s^2 = 500 - 306,42$$
$$s^2 = 193,58$$
$$s = 13,9\,m$$

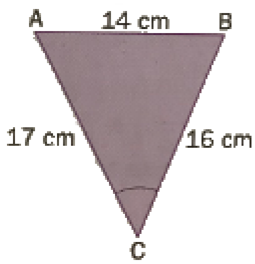
3.



$$m^2 = 97^2 + 133^2 - 2(97)(133)\cos 121^\circ$$
$$m^2 = 27098 - (-13289,0)$$
$$m^2 = 40387,0$$
$$m = 201,0\,m$$

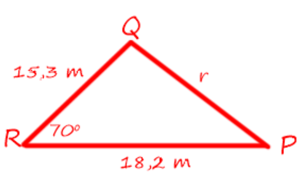
Trouve l'angle indiqué, au dixième de degré près.

5.



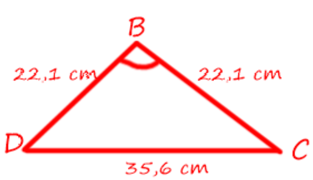
$$14^2 = 17^2 + 16^2 - 2(17)(16)\cos C$$
$$196 = 289 + 256 - 544\cos C$$
$$196 - 289 - 256 = -544\cos C$$
$$-349 = -544\cos C$$
$$\cos C = \frac{-349}{-544} = 0,6415$$
$$\measuredangle C = 50,1^\circ$$

7. Dans le ΔPQR, $p = 15,3\,m$, $q = 18,2\,m$ et $\measuredangle R = 70^\circ$. Trouve r.



$$r^2 = 18,2^2 + 15,3^2 - 2(18,2)(15,3)\cos 70^\circ$$
$$r^2 = 331,24 + 234,09 - 556,92 \times 0,3420$$
$$r^2 = 565,33 - 190,47$$
$$r^2 = 374,86$$
$$r = 19,4\,m$$

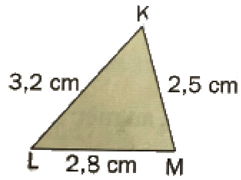
9. Dans le ΔBCD, $b = 35,6\,cm$, $c = 22,1\,cm$ et $d = 22,1\,cm$. Trouve $\measuredangle B$.



$$35,6^2 = 22,1^2 + 22,1^2 - 2(22,1)(22,1)\cos B$$
$$1267,36 = 488,41 + 488,41 - 976,82\cos B$$
$$1267,36 - 488,41 - 488,41 = -976,82\cos B$$
$$290,54 = -976,82\cos B$$
$$\cos B = \frac{290,54}{-976,82}$$
$$\cos B = -0,2974$$
$$\measuredangle B = 107,3^\circ$$

Résoudre

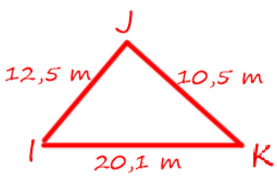
11.



$$3,2^2 = 2,5^2 + 2,8^2 - 2(2,5)(2,8)\cos M$$
$$10,24 = 6,25 + 7,84 - 14\cos M$$
$$10,24 - 6,25 - 7,84 = -14\cos M$$
$$-3,84 = -14\cos M$$
$$\cos M = \frac{-3,84}{-14}$$
$$\cos M = 0,2743$$
$$\measuredangle M = 74,1^\circ$$

$$\frac{\sin 74,1^\circ}{3,2} = \frac{\sin L}{2,5}$$
$$3,2\sin L = 0,9617 \times 2,5$$
$$\sin L = 0,7514$$
$$\measuredangle L = 48,7^\circ$$
$$\measuredangle K = 180 - 74,1 - 48,7 = 57,2^\circ$$

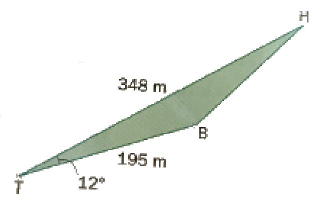
13. Dans le $\Delta IJK, i = 10,5\text{ m}, j = 20,1\text{ m et } k = 12,5\text{ m}.$



$$20,1^2 = 12,5^2 + 10,5^2 - 2(12,5)(10,5)\cos J$$
$$404,01 = 156,25 + 110,25 - 262,5\cos J$$
$$137,51 = -262,5\cos J$$
$$\cos J = \frac{137,51}{-262,5}$$
$$\cos J = -0,5238$$
$$\measuredangle J = 121,6^\circ$$

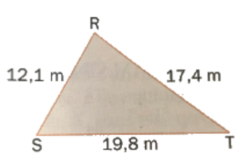
$$\frac{\sin 121,6^\circ}{20,1} = \frac{\sin K}{12,5}$$
$$20,1\sin K = 0,8517 \times 12,5$$
$$\sin K = 0,5297$$
$$\measuredangle K = 32,0^\circ$$
$$\measuredangle K = 180 - 121,6 - 32,0 = 26,4^\circ$$

15. Golf – Au club de golf de Fisherville, la plus courte distance entre le tee et le huitième trou est de 348 m. Au premier coup, Mario frappe la balle et la fait atterrir à 195 m du tee. Toutefois, il coupe sa balle et la droite qui relie le tee et la balle forme un angle de 12° avec la droite qui relie le tee et le trou. Après ce premier coup, quelle est la distance entre le trou et la balle, au mètre près.



$$t^2 = 195^2 + 348^2 - 2(195)(348)\cos 12^\circ$$
$$t^2 = 38025 + 121104 - 135720(0,9781)$$
$$t^2 = 26381,3$$
$$t = 162\text{ m}$$

18. Mesure – Trouve l'aire du triangle RST au mètre carré près à partir des mesures indiquées.



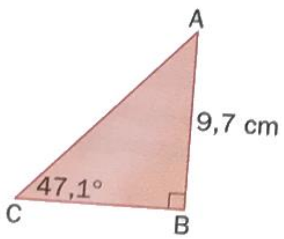
$$17,4^2 = 19,8^2 + 12,1^2 - 2(19,8)(12,1)\cos S$$
$$302,76 = 392,04 + 146,4 - 479,16\cos S$$
$$-235,68 = -479,16\cos S$$
$$\cos S = \frac{-235,68}{-479,16}$$
$$\cos S = 0,4919$$
$$\measuredangle S = 60,5^\circ$$

$$\sin 60,5^\circ = \frac{\text{hauteur}}{12,1}$$
$$\text{hauteur} = 10,5\text{ m}$$
$$\text{Aire} = \frac{19,8 \times 10,5}{2} = 104\text{ m}^2$$

Omnimath 10 p. 356 #12 à 27, 31

Résous chaque triangle. Arrondis chaque longueur au dixième d'unité et chaque angle au dixième de degré.

12.



$\measuredangle A = 180 - 47,1 - 90 = 42,9°$

$\sin 47,1 = \dfrac{9,7}{b}$

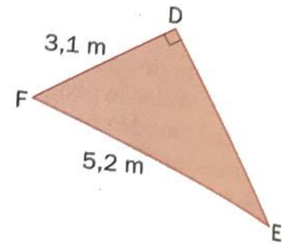
$0,7325b = 9,7$

$b = 13,2\text{ cm}$

$\cos 47,1° = \dfrac{a}{13,2}$

$a = 9,0\text{ cm}$

13.



$\sin E = \dfrac{3,1}{5,2}$

$\sin E = 0,5962$

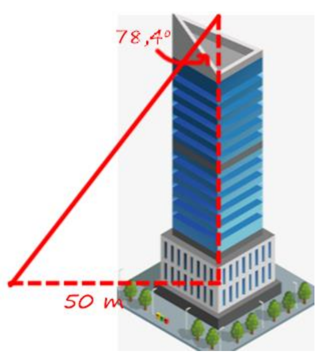
$\measuredangle E = 36,6°$

$\measuredangle F = 180 - 36,6 - 90 = 53,4°$

$\sin 53,4° = \dfrac{f}{5,2}$

$f = 4,2\text{ m}$

14. One Canada Square – Le plus haut gratte-ciel de Londres, en Angleterre, se trouve à l'adresse suivante : One Canada Square. Du sommet de ce gratte-ciel, l'angle de dépression d'un point situé au sol à 50 m de la base du gratte-ciel mesure 78,4°. Calcule la hauteur du gratte-ciel, au mètre près.

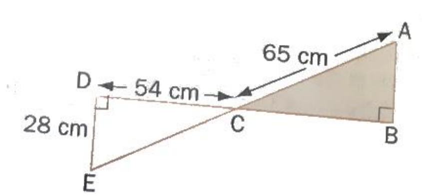


$\tan 78,4° = \dfrac{h}{50}$

$h = 243,6\text{ m}$

La hauteur du gratte-ciel est de 244 m.

15. Trouve la longueur de AB, au centimètre près.



$\tan DCE = \dfrac{28}{54}$

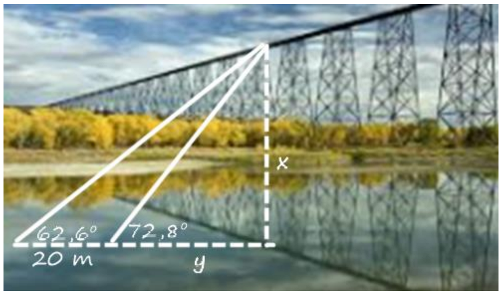
$\measuredangle DCE = 27,4°$

$\sin 27,4° = \dfrac{AB}{65}$

$0,4602 \times 65 = AB$

$AB = 30\text{ cm}$

16. Pont en contre-haut – Le pont de Lethbridge, appelé High Level Bridge, traverse la rivière Oldman à Lethbridge, en Alberta. Il mesure plus de 1 km de long. À partir d'un point donné sur la rivière, l'angle d'élévation du sommet du pont est de 62,6°. à partir d'un autre point, situé 20 m plus près du pont, il est de 72,8°. Quelle est la hauteur du pont au-dessus de la rivière, au mètre près?



La hauteur du pont est de 96 m.

$\tan 62,6^\circ = \dfrac{x}{20+y}$ $\qquad \tan 72,8^\circ = \dfrac{x}{y}$

$1,9292(20+y) = x$ $\qquad 3,2305y = x$

$$38,58 + 1,9292y = 3,2305y$$
$$38,58 = 1,3013y$$
$$y = 29,6\,m$$
$$3,2305(29,6) = x$$
$$x = 96\,m$$

Résous, au dix-millième près.

17. sin 92° = 0,9994 18. Cos 100°= -0,1736

19. Sin 129,3° = 0,7738 20. Cos 163,7° = -0,9598

Suppose que $0^\circ \le A \le 180^\circ$. Trouve $\angle A$ au dixième de degré près.

21. sin A = 0,7531 22. cos A = -0,3412

$\measuredangle A = 48,9^\circ$ $\qquad \measuredangle A = 110,0^\circ$

23. a) Si sinA = 0,5 et que les angles A et B sont complémentaires, quelle est la mesure de l'angle B?

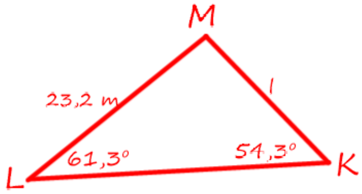
$$\measuredangle A = 30^\circ$$
$$\measuredangle B = 90 - 30 = 60^\circ$$

b) Si cos C = -0,5 et que les angles C et D sont supplémentaires, quelle est la mesure de l'angle D?

$$\measuredangle C = 120^\circ$$
$$\measuredangle D = 180 - 120 = 60^\circ$$

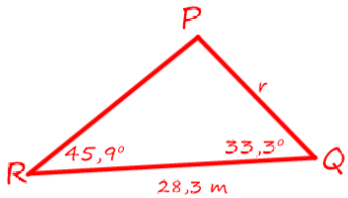
Trouve la longueur du côté indiqué, au dixième près.

24. Dans le ΔKLM, $\angle K = 54,3^\circ, \angle L = 61,3^\circ$ et $k = 23,2\,m$. Trouve l.



$$\frac{\sin 54,3^\circ}{23,2} = \frac{\sin 61,3}{l}$$
$$0,8121l = 0,8771 \times 23,2$$
$$l = 25,1\,m$$

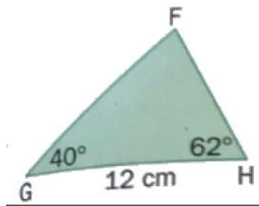
25. Dans le ΔPQR, $\angle Q = 33,3°$, $\angle R = 45,9°$ et $p = 28,3\,cm$. Trouve r.



$$\frac{\sin 100,8°}{28,3} = \frac{\sin 45,9°}{r}$$
$$0,9823r = 0,7181 \times 28,3$$
$$r = 20,7\,m$$

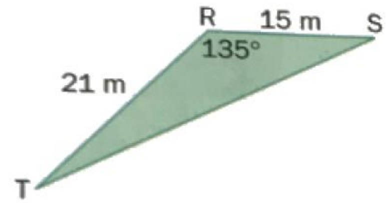
Trouve l'aire de chaque triangle, à l'unité carrée près.

26.



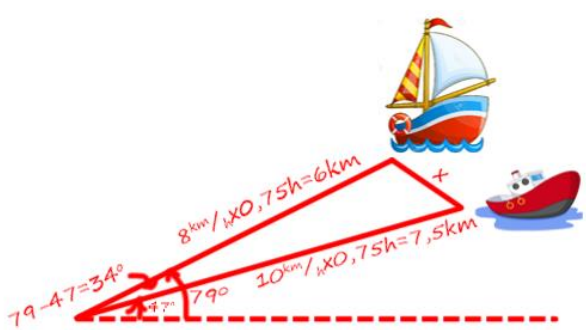
$$\measuredangle F = 180 - 62 - 40$$
$$\measuredangle F = 78°$$
$$\frac{\sin 78°}{12} = \frac{\sin 62°}{h}$$
$$0,9781h = 0,8829 \times 12$$
$$h = 10,8\,cm$$
$$\sin 40° = \frac{hauteur}{10,8}$$
$$hauteur = 6,9\,cm$$
$$Aire_{\Delta} = \frac{bh}{2} = \frac{6,9 \times 12}{2} = 41\,cm^2$$

27.



$$r^2 = 21^2 + 15^2 - 2(21)(15)\cos 135°$$
$$r^2 = 1111,5$$
$$r = 33,3\,m$$
$$\frac{\sin 135°}{33,3} = \frac{\sin T°}{15}$$
$$33,3 \sin T = 0,7071 \times 15$$
$$\sin T = 0,3185$$
$$\measuredangle T = 18,6°$$
$$\sin 18,6° = \frac{hauteur}{21}$$
$$hauteur = 6,7\,m$$
$$Aire_{\Delta} = \frac{bh}{2} = \frac{33,3 \times 6,7}{2} = 112\,m^2$$

31. Navigation – Deux embarcations de plaisance quittent Churchill, au Manitoba, au même moment. L'une des embarcations se déplace à 10 km/h selon un angle de route de 47°. L'autre se déplace à 8 km/h selon un angle de route de 79°. Quelle distance sépare les deux embarcations après 45 min, au dixième de kilomètre près.



$$x^2 = 6^2 + 7,5^2 - 2(6)(7,5)\cos 34°$$
$$x^2 = 36 + 56,25 - 90(0,8290)$$
$$x^2 = 17,64$$
$$x = 4,2\,km$$