Mathématiques 30311-B

Bloc 2

Régularité et algèbre (+- 22 cours)

3 - Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

3.1 Analyser diverses propriétés de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie
- Modèles mathématiques
- Rôle des paramètres
- *Mode de représentations*
- *Propriété d'une fonction*

Propriétés d'une fonction : domaine et image, image d'une valeur du domaine, valeur(s) du domaine associées à une image, extremum (maximum et minimum), équation de l'axe de symétrie, variation (croissance et décroissance), coordonnées du sommet, zéro et valeur initiale, signe + et -, ordonnées et abscisse(s) à l'origine

3.2 Modéliser des situations à l'aide de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie
- Valeur absolue : y = a|x| + k
- rôle des paramètres des fonctions à l'étude
- graphique de la courbe représentative de chaque fonction à l'étude

La valeur absolue d'un nombre permet de considérer ce nombre sans tenir compte de son signe, celle-ci représente la distance entre 0 et ce nombre. On exprime la valeur absolue d'un nombre en plaçant entre deux traits verticaux.

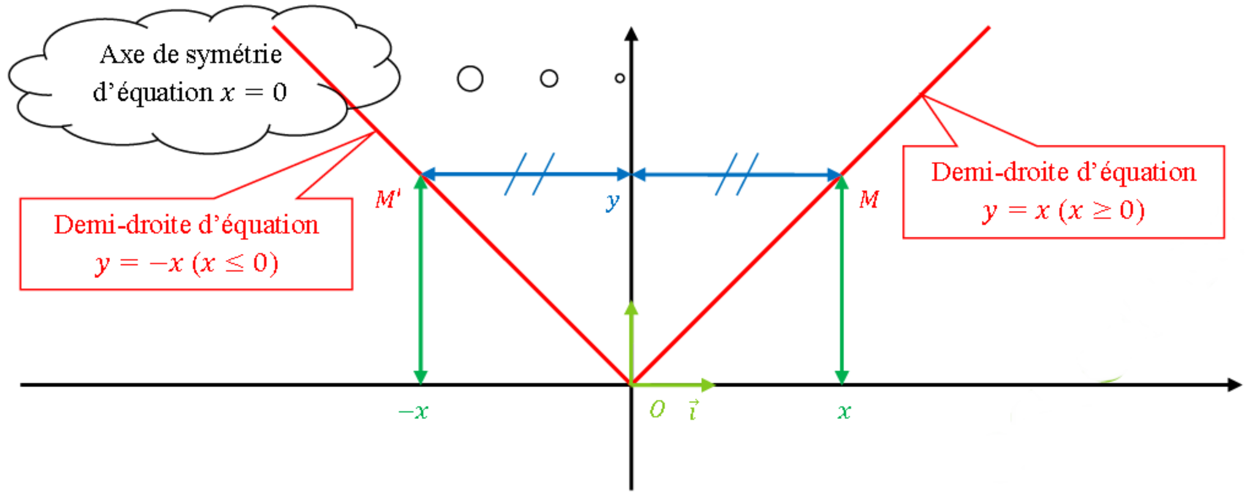
Ex : a) $|3| =$ b) $|-8| =$ c) $-|92{,}1| =$

Les propriétés des valeurs absolues permettent d'effectuer des opérations qui font intervenir des valeurs absolues.

Propriété	Exemple
$\lvert a\rvert \geq 0$	$\lvert -2{,}5\rvert \geq 0$, car $2{,}5 \geq 0$
$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert 6\rvert = \lvert -6\rvert = 6$
$\lvert a \times b\rvert = \lvert a\rvert \times \lvert b\rvert$	$\lvert 6 \times -4\rvert = \lvert 6\rvert \times \lvert -4\rvert = 6 \times 4 = 24$
$\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$, où $b \neq 0$	$\left\lvert \frac{-16}{4}\right\rvert = \frac{\lvert -16\rvert}{\lvert 4\rvert} = \frac{16}{4} = 4$

***Activité 1 p. 23
***Activité 2 p. 24

Représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$ et de son axe de symétrie



La règle d'une fonction valeur absolue peut s'écrire sous la forme $f(x) = a|b(x-h)| + k$ où $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Toutefois, les propriétés des valeurs absolues permettent de transformer cette règle sous la forme canonique $f(x) = a|x-h| + k$

Ex : 1) $\begin{aligned} f(x) &= -3\lvert 2(x-8)\rvert + 5 \\ &= -3 \times \lvert 2\rvert \times \lvert x-8\rvert + 5 \\ &= -3 \times 2 \times \lvert x-8\rvert + 5 \\ &= -6\lvert x-8\rvert + 5 \end{aligned}$	Ex : 2) $\begin{aligned} f(x) &= -3\lvert 2(x-8)\rvert + 5 \\ &= -3 \times \lvert 2\rvert \times \lvert x-8\rvert + 5 \\ &= -3 \times 2 \times \lvert x-8\rvert + 5 \\ &= -6\lvert x-8\rvert + 5 \end{aligned}$

Dans ce module, nous allons travailler avec $f(x) = a|x| + k$ donc le sommet de la fonction sera toujours sur l'axe des y.

Recherche de la règle d'une fonction valeur absolue

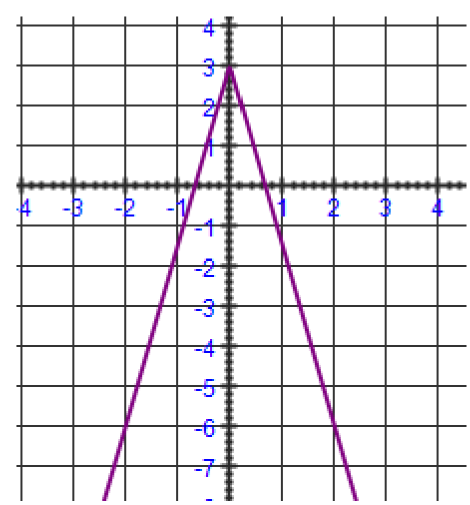
Si on connait le sommet (0, k) ainsi qu'un autre point.

Exemple : S(0, 3) et P(2, -6)

$$\begin{aligned} y &= a|x| + k \\ -6 &= a|2| + 3 \\ -9 &= a|2| \\ -9 &= 2a \\ a &= \frac{-9}{2} \end{aligned}$$

$$y = a|x| + k$$

$$y = \frac{-9}{2}|x| + 3$$



***Mise au point (partie 1) p. 29 # 1, 2a-d, 3, 4, 5

3.8 Modéliser des situations se traduisant par des équations ou des inéquations afin de résoudre des problèmes

- résolution d'équations et d'inéquations avec valeurs absolues
- résolution d'inéquations quadratiques (*factorisation*, complétion du carré, formule quadratique)

Résolution d'une équation valeur absolue à une variable

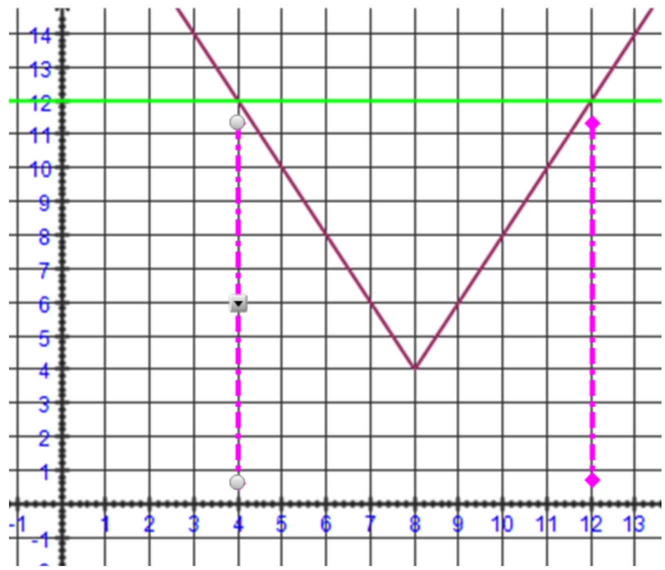
Par définition, on a : $|x| = x, si\ x \geq 0$ et $|x| = -x, si\ x < 0.$

Donc, pour résoudre

$$2|x-8| + 4 = 12$$
$$2|x-8| = 8$$
$$|x-8| = 4$$

d'après la définition

$$x - 8 = 4 \quad ou \quad x - 8 = -4$$
$$x = 12 \quad ou \quad x = 4$$



Exercice :

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $|x - 2| = 7$ b) $|x - 2| = 0$ c) $|x - 2| = -6$

d) $|2x - 3| = 0$ e) $2|2x + 12| = 4$ f) $|x| + 5 = 0$

g) $\left|\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right| = 1$ h) $|-2(x-1)| = 2$ i) $|x| = x + 2$

***Mise au point (partie 2) p. 31 # 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 18a-b, 19, 20, 21

Résolution d'une inéquation valeur absolue à une variable.

Ex : $2|3x-6| < 18$

$|3x-6| < 9$

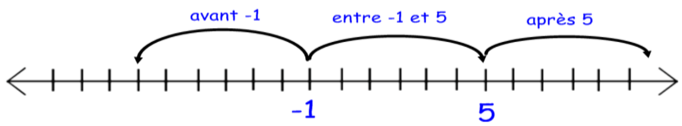
On trouve les valeurs de x pour une équation en remplaçant le signe d'inéquation par un signe =.

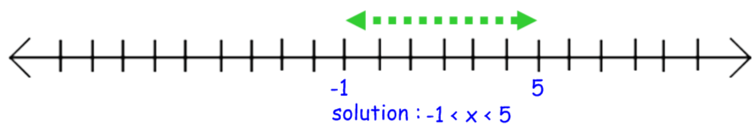
$3x-6=9$ ou $3x-6=-9$

$3x = 15 \qquad 3x = -3$

$x = 5 \qquad x = -1$

Vérifie une valeur dans chacune des intervalles.





Si je remplace par $x=-2$	Si je remplace par $x=0$	Si je remplace par $x=6$
$\lvert 3(-2)-6\rvert < 9$	$\lvert 3(0)-6\rvert < 9$	$\lvert 3(6)-6\rvert < 9$
$\lvert -12\rvert < 9$	$\lvert -6\rvert < 9$	$\lvert 12\rvert < 9$
$12 < 9$	$6 < 9$	$12 < 9$
Non	oui	Non

Exercice :

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $|x-2| < 7$ b) $|2x+1| \geq 3$ c) $3|2x+7| \leq 9$

d) $3|9-x| \leq 6$ e) $|9-x| > 6$ f) $|2x-1| < 11$

***Mise au point (partie 3) p. 31 # 22, 24 à 28

3.6 Factoriser et développer des polynômes

- *Développement d'expressions algébriques*

Pour résoudre une équation quadratique par <u>factorisation</u>, la première étape est de l'écrire sous la forme P(x) = 0, ensuite décomposer en facteurs ; placer chaque facteur égal à 0 et résoudre.

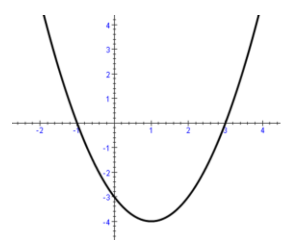
Exemple : $2(x^2 + x) = 20 - x$

$$2x^2 + 2x - 20 + x = 0$$
$$2x^2 + 3x - 20 = 0$$
$$\frac{(2x+8)(2x-5)}{2} = 0 \qquad \_\times\_ = -40 \qquad \_+\_ = 3$$
$$(x+4)(2x-5) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = 0$$
$$x = -4 \qquad x = \frac{5}{2}$$

Une deuxième méthode pour trouver les racines est la <u>complétion du carré</u>, on fait le même travail que ce qu'on faisait pour placer l'équation sous la forme canonique, mais on doit ajouter des étapes car on cherche les valeurs de x lorsque y = 0.

$$y = x^2 - 2x - 3$$
$$\text{Ex : } 0 = (x^2 - 2x + \underline{1}) - \underline{1} - 3$$
$$0 = (x-1)^2 - 4$$

$$4 = (x-1)^2$$
$$\sqrt{4} = \sqrt{(x-1)^2}$$
$$2 = \pm(x-1)$$
$$x - 1 = \pm 2$$
$$x = 1 \pm 2$$
$$x = 1 + 2 = 3 \qquad x = 1 - 2 = -1$$



Exercices :

1. a) $2x^2 - x - 3 = 0$ b) $2x^2 - 5x = 3$ c) $0{,}5x^2 - x = 3$

   d) $40x^2 = 10 - 9x$ e) $0{,}02x^2 - 0{,}03x + 7 = 0$ f) $1{,}07x^2 + 3{,}5x = 0$

2. La largeur d'un rectangle mesure 1m de moins que sa largeur. L'aire mesure 72m^2. Détermine la longueur et la largeur.
3. L'aire d'un champ rectangulaire mesure $2275\ \text{m}^2$. Le champ est entouré d'une clôture de 200 m. Quelles sont les dimensions du champ ?
4. La somme des carrés de deux nombre entiers pairs consécutifs est égale à 452. Trouve ces nombres.
5. Le drapeau de l'unité est un des plus grands drapeaux canadiens. Sa longueur est égale au double de sa largeur et son aire mesure $167{,}2\text{m}^2$. Détermine les dimensions du drapeau au dixième de mètre.

Si on arrive à une réponse qui n'a pas une racine entière, on peut laisser la réponse avec la racine, mais il faut la simplifier.

$$2x^2-4x-7=0$$

$$2\left[\left(x^2-2x+\underline{1}\right)-\underline{1}-\frac{7}{2}\right]=0$$

$$\frac{2}{2}\left[(x-1)^2-\frac{2}{2}-\frac{7}{2}\right]=\frac{0}{2}$$

$$(x-1)^2-\frac{9}{2}=0$$

$$(x-1)^2=\frac{9}{2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$\pm(x-1)=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x-1=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\frac{1\pm3\sqrt{2}}{2}$$

Divise partout par la valeur de « a ».

Place les x dans la parenthèse pour compléter le carré.

Fais la racine carrée de x^2 et le deuxième terme divisé par 2x.

Élève ce résultat au carré, et place-le au lieu des espaces.

Parce que c'est un zéro de l'autre côté du signe égale on peut diviser par « a » de chaque côté.

Emporter ce qui n'est pas dans la parenthèse de l'autre côté du signe égale.

Faire la racine carrée de chaque côté.

Quand on fait la racine d'une variable, le résultat est $\pm$, mais il est plus facile de le placer avec le nombre de l'autre côté du signe égal.

Mettre le x seul.

Une troisième méthode pour trouver les racines est la formule quadratique qui est trouvée à partir de la complétion du carré.
Si on part de l'équation générale $ax^2 + bx + c = 0$ et qu'on fait la complétion du carré, on arrive à l'équation quadratique.

Cas général	Exemple
$ax^2 + bx + c = 0$	$2x^2 + 3x - 1 = 0$
$a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=0$	$2\left[\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3^2}{4^2}\right)-\frac{3^2}{4^2}-\frac{1}{2}\right]=0$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}=0$	$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{8}{16}=0$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b-4ac}{4a^2}=0$	$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$
$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b-4ac}{4a^2}}=0$	$\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{17}{16}}$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

Donc $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ex : Résous $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Pour remplacer dans la formule, on prend a = 3, b = 5 et c = -2.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} \qquad x = \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{-5-7}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

Exercices :

1. a) $2x^2 - x - 3 = 0$ b) $2x^2 - 5x = 3$ c) $0,5x^2 - x = 3$

   d) $40x^2 = 10 - 9x$ e) $0,02x^2 - 0,03x + 7 = 0$ f) $1,07x^2 + 3,5x = 0$

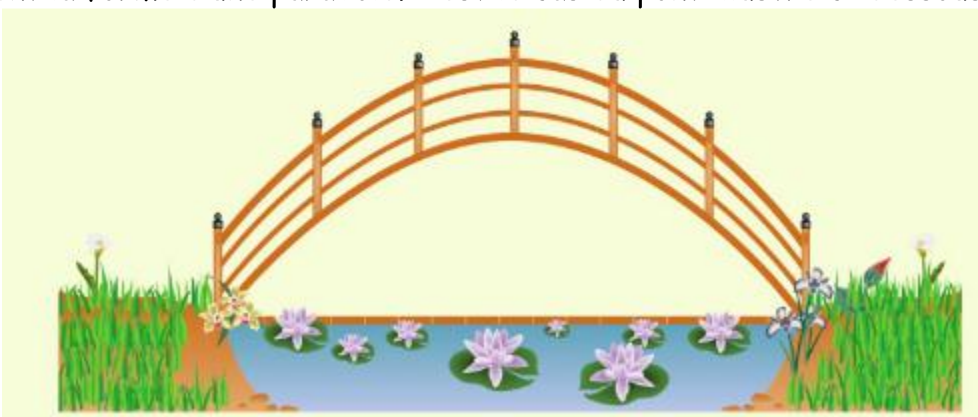
2. En une saison, un magasin d'articles de sport vend 90 vestes de ski à 200$ chacune. Chaque fois qu'on réduit le prix de 10$, on vend 5 vestes de plus. Détermine le nombre de vestes qu'on a vendues et le prix auquel on les a vendues si on a généré des revenus de 17 600$.
3. La hauteur d'un triangle mesure 2 unités de plus que la longueur de sa base. L'aire du triangle mesure 10 unités carrées. Trouve la longueur de la base, au centième près.
4. Petra a couru 9 km en une heure. Durant les 4 derniers kilomètres, elle a couru 2km/h moins vite que durant les 5 premiers kilomètres. Quelle était sa vitesse durant les 5 premiers kilomètres ?
5. Un camion qui transporte l'équipement d'un groupe rock va de Calgary à Spokane, soit une distance de 720 km. Pendant le trajet de retour, le camion augmente sa vitesse moyenne de 10 km/h. Si l'aller et le retour a duré 17 heures en tout, quelle était la vitesse moyenne du camion de Calgary à Spokane ?

***Mise au point p. 97 # 9 à 16

Mathématiques 30311-B

Nous avons déjà résous des systèmes d'équations à deux variables de degré 1. Maintenant, nous allons mélanger les systèmes en ayant des équations du 1er degré, 2e degré et valeur absolue dans le même problème.

Problème p. 228
Pont en réparation
Dans les jardins japonais, les ponts font partie intégrante de l'aménagement. Il arrive parfois que ceux-ci aient la forme d'une parabole. C'est le cas du pont illustré ci-dessous.

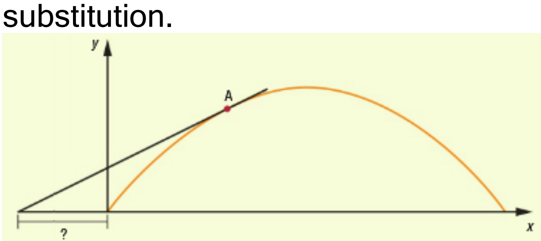


La partie gauche de ce pont est en réparation et les responsables du jardin ont appuyé une planche sur le pont de façon que la pente de celle-ci soit de ½. Dans la représentation ci-dessous, le plancher du pont est modélisé par une parabole dont l'équation est

$y=-\frac{5}{32}x^2+\frac{5}{4}x$, où x varie de 0 m à 8 m. Le segment qui représente la planche touche la parabole en un seul endroit, doit au point A.

Est-il possible que la planche touche le sol à une distance de 1,6 m du pont?

Il suffit de résoudre le système par substitution.



Non, ce n'est pas possible car la planche toucherait le pont à deux endroits.

***Activité 1 p. 229
***Activité 2 p. 230

$y=\frac{1}{2}x+b \quad et \quad (-1,6;0)$

$0=\frac{1}{2}(-1,6)+b$

$b=0,8$

$y=-\frac{5}{32}x^2+\frac{5}{4}x$

$y=\frac{1}{2}x+0,8$

$\frac{1}{2}x+0,8=-\frac{5}{32}x^2+\frac{5}{4}x$

$0=-\frac{5}{32}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{8}{10}$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-4\left(\frac{-5}{32}\right)\left(\frac{-8}{10}\right)}}{2\left(\frac{-5}{32}\right)}$

$x=\frac{-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}}{\frac{-5}{16}}$

$x=\frac{-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}}}{\frac{-5}{16}}=\frac{-\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}}{\frac{-5}{16}}$

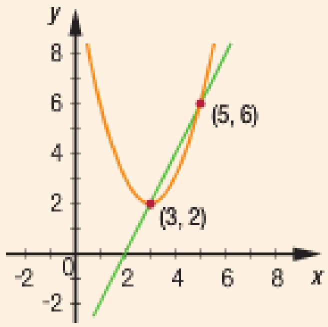
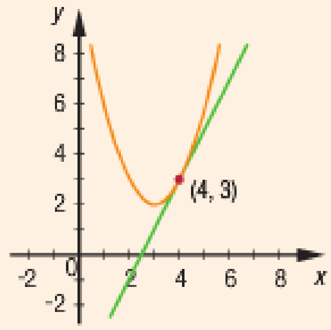
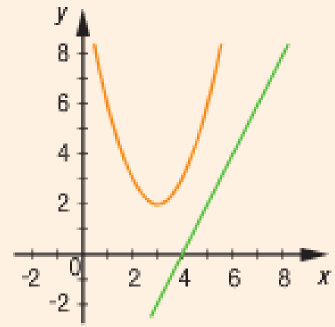
$x=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{-5}{16}}=\frac{8}{5}=1,6$

$x=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{-5}{16}}=\frac{16}{5}=3,2$

Nombre de solutions

La résolution d'un tel système d'équations mène généralement à résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. On peut alors déterminer le nombre de solutions du système d'équations à l'aide du signe du discriminant Δ (la valeur sous la racine dans la formule quadratique) associé à cette équation.

Ex. :

Système d'équations	1) $y = x^2 - 6x + 11$ $y = 2x - 4$	2) $y = x^2 - 6x + 11$ $y = 2x - 5$	3) $y = x^2 - 6x + 11$ $y = 2x - 8$
Représentation graphique			
Équation obtenue et discriminant	$x^2 - 8x + 15 = 0$ $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(15)$ $\Delta = 4 > 0$	$x^2 - 8x + 16 = 0$ $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(16)$ $\Delta = 0$	$x^2 - 8x + 19 = 0$ $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(19)$ $\Delta = -12 < 0$
Solution	Il y a deux solutions, (3, 2) et (5, 6).	Il y a une solution, (4, 3).	Il n'y a aucune solution.

***Mise au point p. 233

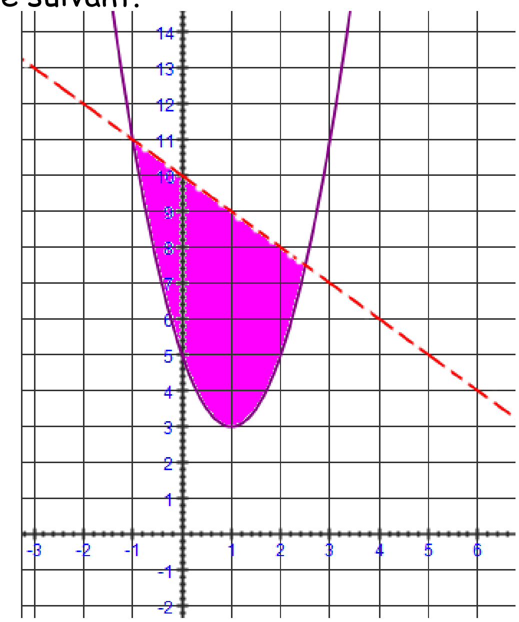
3.5 Modéliser et résoudre des problèmes qui se traduisent par un système d'équations ou d'inéquations

- système d'inéquations semi-linéaires

Comme dans les systèmes d'inéquations à deux variables qu'on a appris, on peut aussi avoir des systèmes d'inéquations semi-linéaires, ce qui veut dire qu'on combine des inéquations linéaires avec des inéquations quadratiques et valeurs absolues.

Exemple : Représente l'ensemble solution du système suivant.

$$y \geq 2(x-1)^2 + 3$$
$$x + y < 10$$



*** Mise au point p. 247 # 2, 4, 8,
*** Vue d'ensemble p. 254 # 2, 4, 10, 13, 16, 18
***Réactivation p. 267

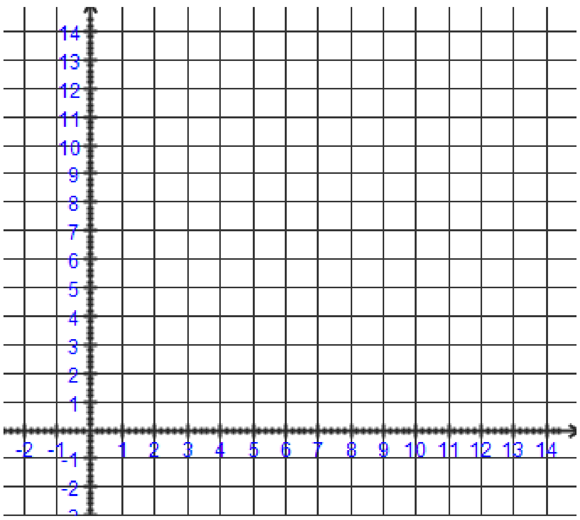
3.5 Modéliser et résoudre des problèmes qui se traduisent par un système d'équations ou d'inéquations

- optimisation (règle : fonction de l'objectif, évaluation, prise de décision)

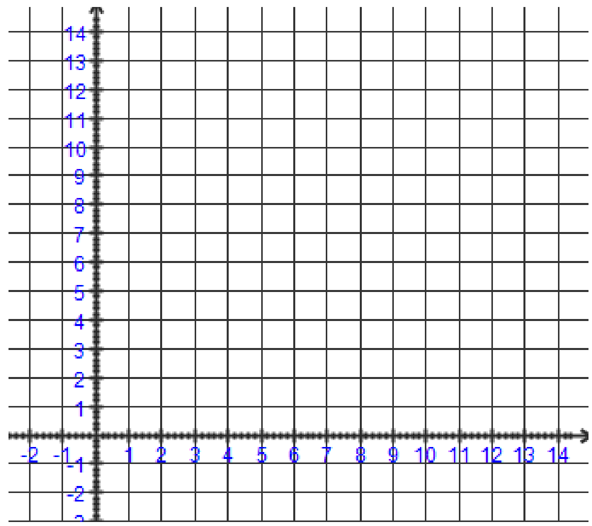
Lorsqu'un système d'inéquations du premier degré à deux variables traduit un ensemble de contraintes, la représentation graphique de l'ensemble solution est un polygone de contraintes. Le polygone est dit borné lorsque la figure qui lui est associée est fermée. Autrement, il est dit non-borné.

Exemple :

1. $y \geq 2 \quad y \leq 2x \quad x + 2y \leq 12$



2. $x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x + 2y \geq 12 \quad 2x + y \geq 8$



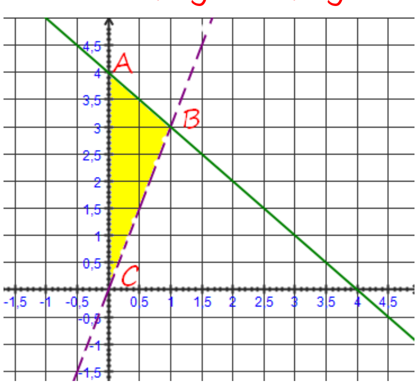
Dans la plupart des situations réelles, les variables ne peuvent pas être inférieures à 0. On ajoute donc au système deux inéquations appelées contraintes de positivité. Exemple, si on parle $, de personnes, de longueur etc… ces quantités ne peuvent pas prendre de valeur négative.

Sommets d'un polygone de contraintes

Pour déterminer les coordonnées d'un sommet d'un polygone de contraintes, on doit résoudre le système formé des deux équations associées aux droites qui forment ce sommet.

- Il est possible de les déterminer graphiquement ou algébriquement.
- Un sommet fait partie de la région-solution si toutes les droites frontières à ce sommet sont tracées d'un trait plein.

Ex : $x \geq 0; \quad y > 3x; \quad y \leq 4 - x$



- Le sommet A fait partie de la solution car toutes les droites qui le forment sont pleines.
- Les sommets B et C ne font pas partie de la solution car une des droites qui le forment est pointillée.

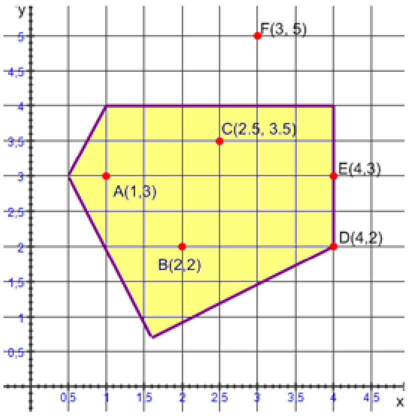
*** Mise au point p. 283# 1 à 8, 10 à 15

Optimisation

Fonction à optimiser – dans certaines situations faisant intervenir un ensemble de contraintes, l'objectif visé se traduit par la recherche de solution la plus avantageuse, dans certains cas on veut la solution minimale tandis que dans d'autres cas, on cherche la solution maximale.

Pour trouver la fonction à optimiser, on doit trouver l'équation de la forme $z = ax + by + c$ qui correspond avec l'objectif visé.

Exemple : Voici un polygone de contraintes et les coordonnées de certains points. La règle de la fonction à optimiser est $z = 4x + 2y$



****Activité 1 p. 290*
****Mise au point p. 293 # 1à10, et 12*

En remplaçant les sommets du polygone de contraintes dans la fonction $z = ax + by + c$, on peut trouver celui qui engendre la valeur optimale.

Résolution d'un problème d'optimisation (p. 305)

Exemple : Un constructeur d'automobiles qui produit des voitures compactes et des mini fourgonnettes désire maximiser son profit hebdomadaire. Les profits générés sont de 4 K$ pour chaque voiture compacte et de 10 K$ pour chaque mini fourgonnette. Sa capacité de production hebdomadaire est au plus 2100 véhicules, et il doit produire chaque semaine au moins 1000 voitures compactes et au moins 200 mini fourgonnettes. Le nombre de voitures compactes produites doit être au moins 2 fois plus grand que le nombre de mini fourgonnettes.

****Mise au point p. 306 # 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12*