Mathématiques 30331C

Bloc 1

Régularité et algèbre (+- 35 cours)

3 - Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

3.1 Analyser diverses propriétés de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie

- Modèles mathématiques
- Rôle des paramètres
- *Mode de représentations*
- *Propriété d'une fonction*

Propriétés d'une fonction : domaine et image, image d'une valeur du domaine, valeur(s) du domaine associées à une image, extremum (maximum et minimum), équation de l'axe de symétrie, variation (croissance et décroissance), coordonnées du sommet, zéro et valeur initiale, signe + et -, ordonnées et abscisse(s) à l'origine

Rappel - Un lien entre deux variables est appelé une *relation*.

Généralement, dans une relation entre deux variables :

- Celle dont la variation entraine la variation de l'autre est appelée variable *dépendante* ;
- Celle dont la variation réagit à la variation de l'autre est appelée variable *indépendante*.

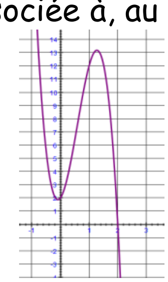
Exemple :

Relation	*Variable indépendante*	*Variable dépendante*
1) La masse d'une dinde surgelée et son prix.	Masse → Prix *Le prix d'une dinde surgelée dépend de sa masse.*	
2) L'aire totale des murs et du plafond d'une pièce et le temps pour peindre cette pièce.	Aire totale → Temps *Le temps pour peindre une pièce dépend de l'aire totale des murs et du plafond.*	

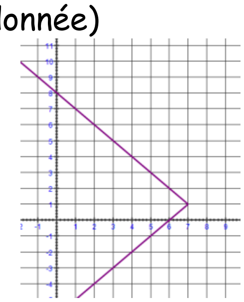
Une relation entre deux variables est dite fonctionnelle, ou tout simplement une fonction, lorsqu'à chaque valeur de la variable indépendante est associées au plus une valeur de la variable dépendante. (Chacune des abscisses est associée à, au plus, une ordonnée)

La relation du graphique 1 est une fonction, mais celle du 2e n'est pas une fonction car pour l'abscisse 6, il y a deux ordonnées, soient le 0 et le 2

1)



2)



Mathématiques 30331C

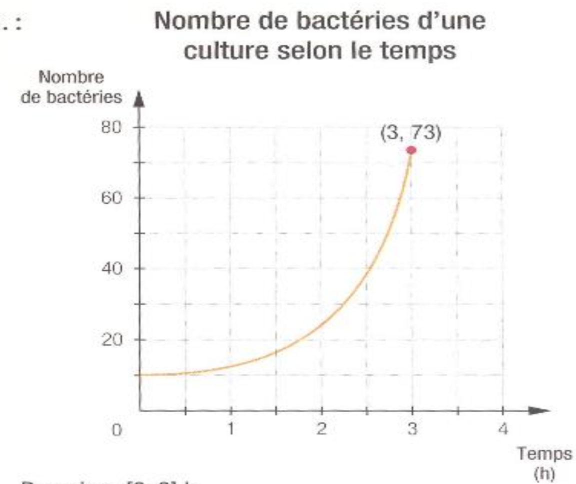
Propriétés :

Domaine et image :

Le domaine d'une fonction est l'ensemble des valeurs que prend la variable indépendante.

Le codomaine ou l'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs que prend la variable dépendante.

Ex. :



Domaine : [0, 3] h
Codomaine : {10, 11, 12, ..., 73} bactéries

Variation : croissante, décroissante et constante

Sur un intervalle du domaine, une fonction est :

- Croissante lorsqu'une variation positive ou négative de la variable indépendante entraîne, respectivement, une variation positive ou négative de la variable dépendante ;
- Décroissante lorsqu'une variation positive ou négative de la variable indépendante entraîne, respectivement, une variation négative ou positive de la variable dépendante ;
- Constante lorsqu'une variation de la variable indépendante n'entraîne aucune variation de la variable dépendante

Ex. :

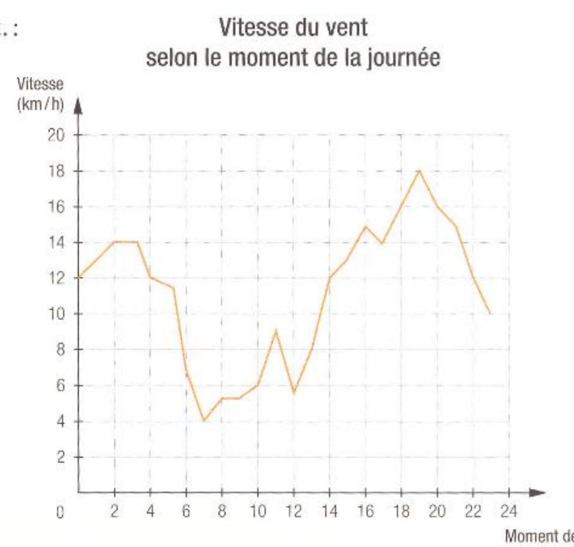
Croissance : [0, 10] min
Constance : [3, 10] min
Décroissance : [3, 15] min

Extremums : minimum et maximum

Le minimum d'une fonction est la plus petite valeur que prend la variable dépendante.

Le maximum d'une fonction est la plus grande valeur que prend la variable dépendante.

Ex. :



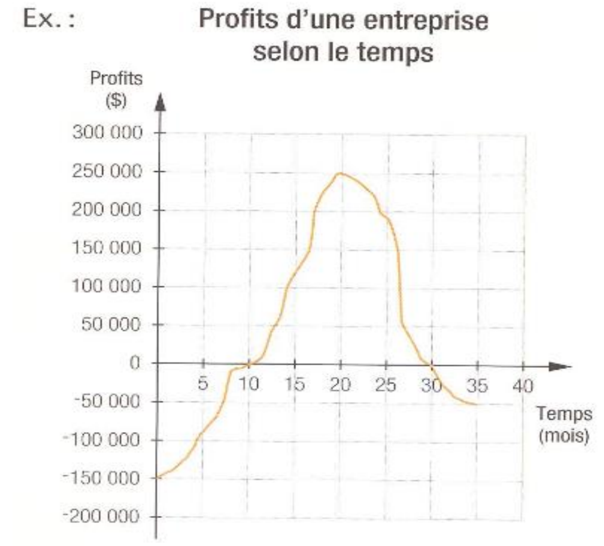
Minimum : 4 km/h
Maximum : 18 km/h

Mathématiques 30331C

Signe : positif ou négatif

Sur un intervalle du domaine, une fonction est :

- Positive si les valeurs de la variable dépendante sont positives ;
- Négative si les valeurs de la variable dépendante sont négatives.

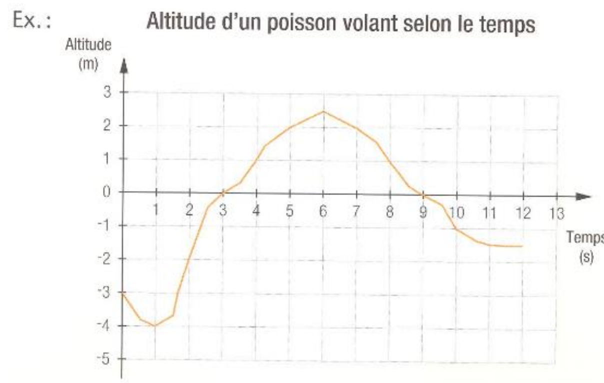


Négatif : [0, 10] ∪ [30, 35] mois
Positif : [10, 30] mois

Coordonnées à l'origine : abscisse à l'origine (zéro) et ordonnée à l'origine (valeur initiale)

Un zéro d'une fonction est une valeur de la variable indépendante lorsque celle de la variable dépendante est zéro. Graphiquement, un zéro correspond à une abscisse à l'origine, c'est-à-dire l'abscisse d'un point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses.

La valeur initiale d'une fonction est la valeur de la variable dépendante lorsque celle de la variable indépendante est zéro. Graphiquement, la valeur initiale correspond à l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de la courbe et de l'axe des ordonnées.



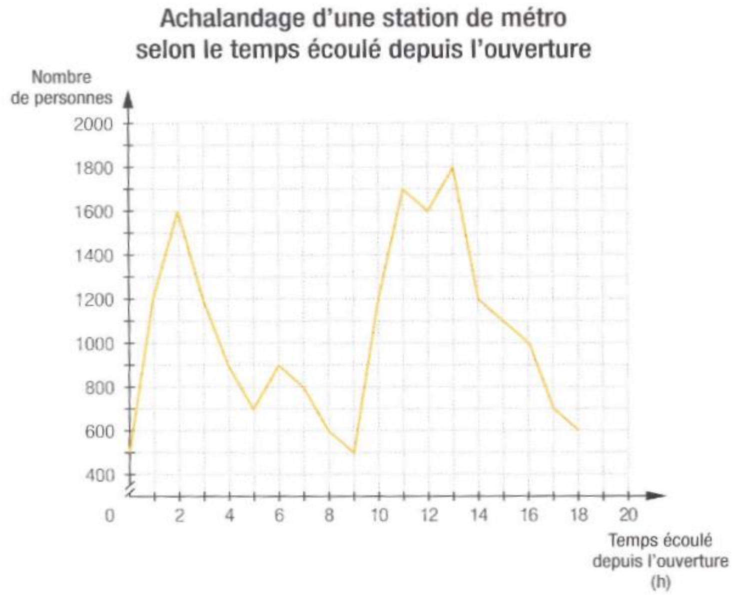
Zéros : 3 s et 9 s
Valeur initiale : -3 m

Propriétés	Axe des x	Axe des y
Domaine	Intervalle en fonction des x	
Image		Intervalle en fonction des y
Zéros de la fonction	Valeurs où le graphique touche l'axe des x (lorsque y = 0)	
Croissance	Intervalle de x où la valeur de y augmente de gauche à droite	
Décroissance	Intervalle de x où la valeur de y diminue de gauche à droite	
Fonction positive	Intervalle où le graphique touche ou est au-dessus de l'axe des x	
Fonction positive	Intervalle où le graphique touche ou est au-dessous de l'axe des x	
Fonction nulle	Valeurs de x	
Valeur initiale		Valeur où le graphique touche l'axe des y (lorsque x = 0)
Maximum		Valeurs de y supérieure à toutes les autres
Minimum		Valeurs de y inférieures à toutes les autres

Mathématiques 30331C

Exercices

1. Le diagramme ci-dessous fournit des renseignements sur l'achalandage d'une station de métro durant une journée.
   a) Quel est l'achalandage :
      i) maximal ? ii) minimal ?

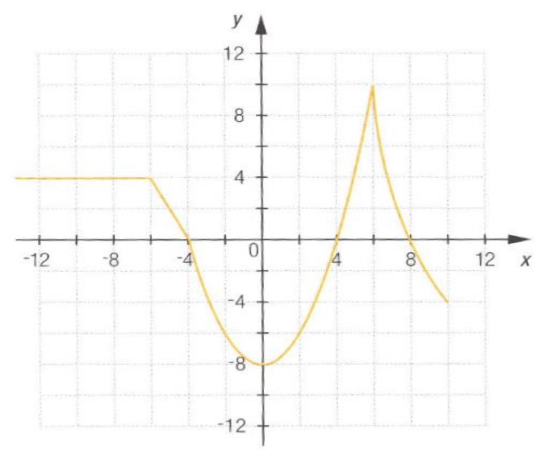


   b) À quels moments l'achalandage est-il de 1200 personnes ?

   c) Sur quels intervalles de temps l'achalandage est-il supérieur à 1200 personnes ?

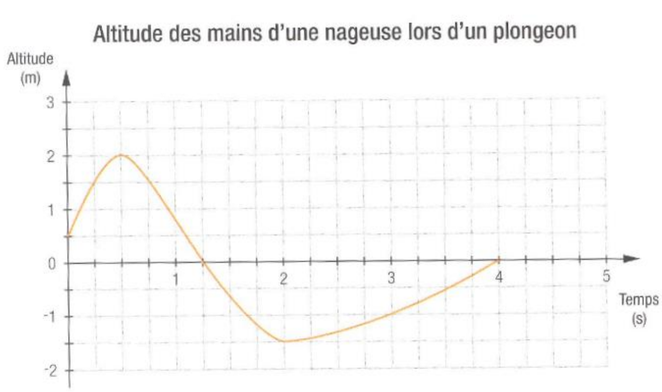
   d) Déterminez la variation sur l'intervalle :
      i) [0, 2] h ii) [2, 9] h

2. Voici la représentation graphique d'une fonction définie par parties :



Fais l'analyse complète des propriétés de cette fonction :
Domaine, image, extremums, valeur initiale, les zéros; la variation; le signe

3. Durant une course de natation, la phase du plongeon est très importante. Le graphique suivant illustre l'altitude des mains d'une nageuse par rapport à la surface de l'eau tout le long de cette phase.



Pour cette fonction, déterminez et interprétez, en tenant compte du contexte :

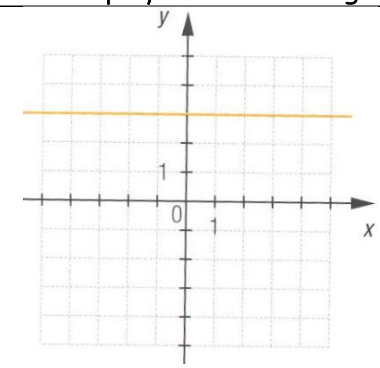
   a) Le domaine et l'image
   b) Les extremums
   c) La valeur initiale
   d) Les zéros
   e) La variation
   f) Le signe

Mathématiques 30331C

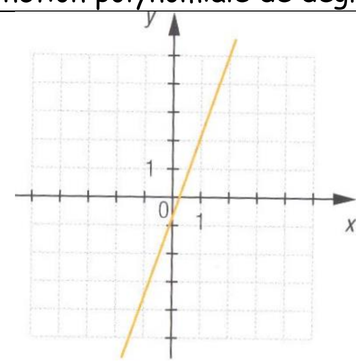
Familles de fonctions

Selon le lien qui existe entre deux variables, il est possible de représenter différentes situations de la vie quotidienne par des modèles mathématiques, c'est-à-dire par des fonctions dont le comportement est à la fois connu et prévisible. Ces modèles permettent, entre autres, d'analyser une situation ou de faire certaines prédictions.

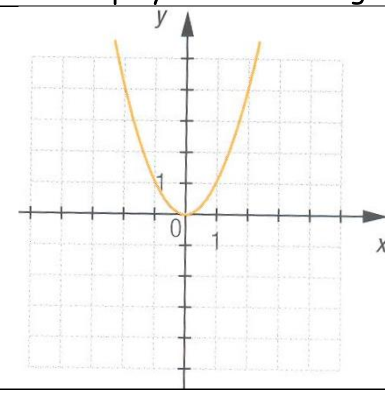
Fonction polynomiale de degré 0



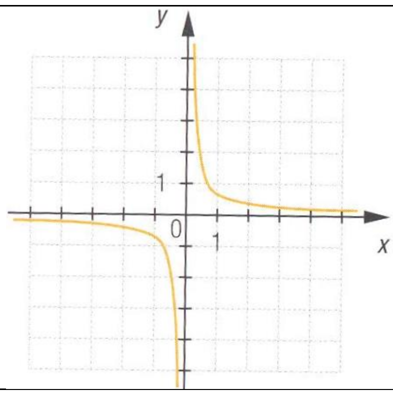
Fonction polynomiale de degré 1



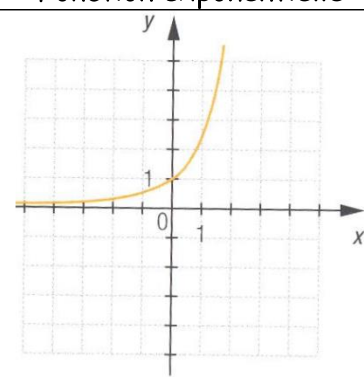
Fonction polynomiale de degré 2



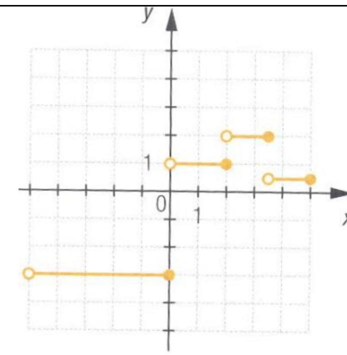
Fonction de variation inverse



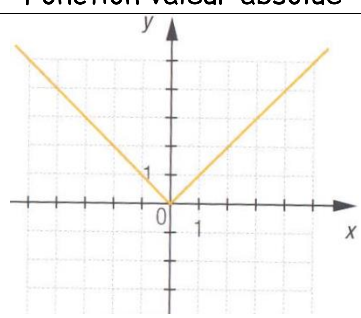
Fonction exponentielle



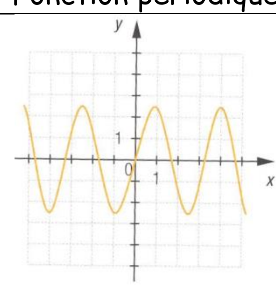
Fonction en escalier



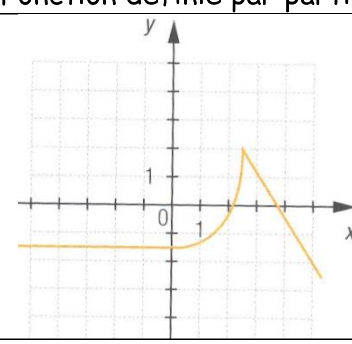
Fonction valeur absolue



Fonction périodique



Fonction définie par parties



Mathématiques 30331C

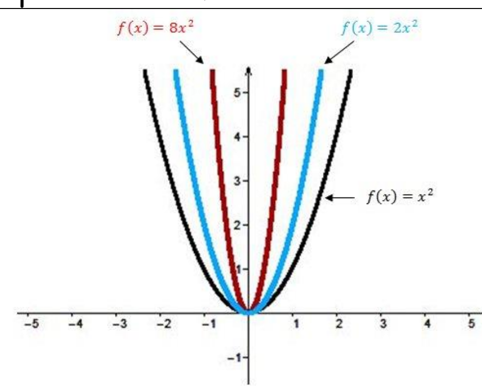
On appelle fonction de base la fonction la plus simple d'une famille de fonctions. En modifiant certaines valeurs, appelées paramètres, il est possible de transformer la règle d'une fonction f de base en une règle transformée g(x) = **a** f (**b**(x – **h**) + **k**. Chaque paramètre a, b, h et k transforment la fonction à leur façon.

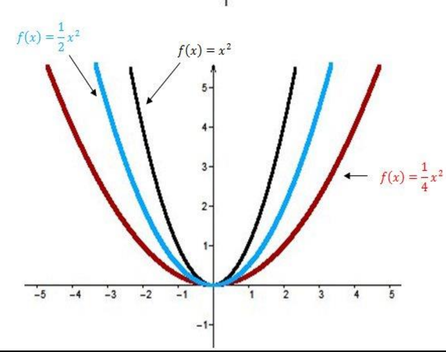
Ex :

Famille de fonctions	Fonction de base	Exemple de fonction transformée
Fonction polynômiale de degré 1	$f(x) = x$	$g(x) = 7x - 3$
Fonction polynômiale de degré 2	$f(x) = x^2$	$g(x) = 0,5(x-2)^2 + 7$
Fonction partie entière	$f(x) = [x]$	$g(x) = 4[3(x+2)] + 1$
Fonction valeur absolue	$f(x) = \|x\|$	$g(x) = 3\|2(x-4)\| + 8,5$
Fonction exponentielle	$f(x) = (base)^4$	$g(x) = -5(7)^{x-3} + 2$
Fonction sinus	$f(x) = \sin x$	$g(x) = 6\sin(x+2) - 1$

La règle d'une fonction peut s'écrire sous différentes formes. La forme canonique met en évidence les paramètres qui transforment la règle d'une fonction de base et est écrite sous sa forme la plus simple.

Le paramètre multiplicatif a : change le graphique sur le plan vertical.

<table>
<tr><td>Si a < -1 ou a > 1</td><td>Allongement vertical</td><td rowspan="3">


</td></tr>
<tr><td>Si –1 < a < 1</td><td>Rétrécissement vertical</td></tr>
<tr><td>Si a < 0</td><td>Symétrie par rapport à l'axe des abscisses</td></tr>
</table>

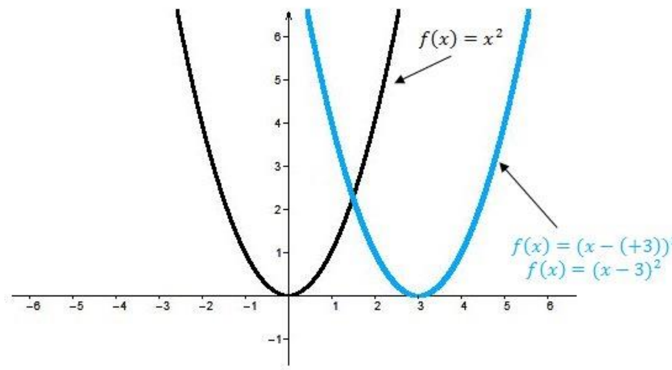
Mathématiques 30331C

Le paramètre multiplicatif b : change le graphique sur le plan horizontal.

Si -1 < b < 1	Allongement horizontal
Si b < -1 ou b > 1	Rétrécissement horizontal
Si b < 0	Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

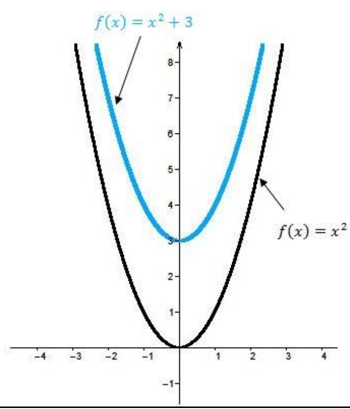
Le paramètre additif h : change le graphique sur le plan horizontal.

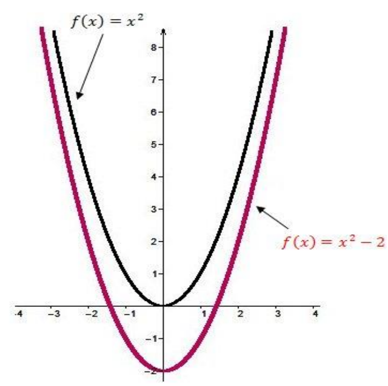
Si h < 0	Translation horizontale vers la gauche
Si h > o	Translation horizontale vers la droite



Le paramètre additif k : change le graphique sur le plan vertical.

Si k < 0	Translation verticale vers le bas
Si k > 0	Translation verticale vers le haut





Résumé : $y = af(b(x + c)) + d$; dans la parenthèse, affecte l'horizontal, à l'extérieur de la parenthèse, affecte la verticale. x Allongement ou rétrécissement, + ou –, translation.

Exemple : $y = -2f(3(x-1))+4$

–	Symétrie par rapport à x	1	TH de 1 →
2	AV de fact. 2	4	TV de 4 ↑
3	RH de fact. 1/3		

Exercices – Par rapport à la règle de la fonction $f(x) = x^2$, quelle(s) modification(s) a subi la courbe de :

a) $G(x) = -3x^2$

b) $H(x) = 2(x - 7)^2 + 1$

c) $M(x) = -(x + 3)^2$

d) $B(x) = ½(x - 1)^2 - 1$

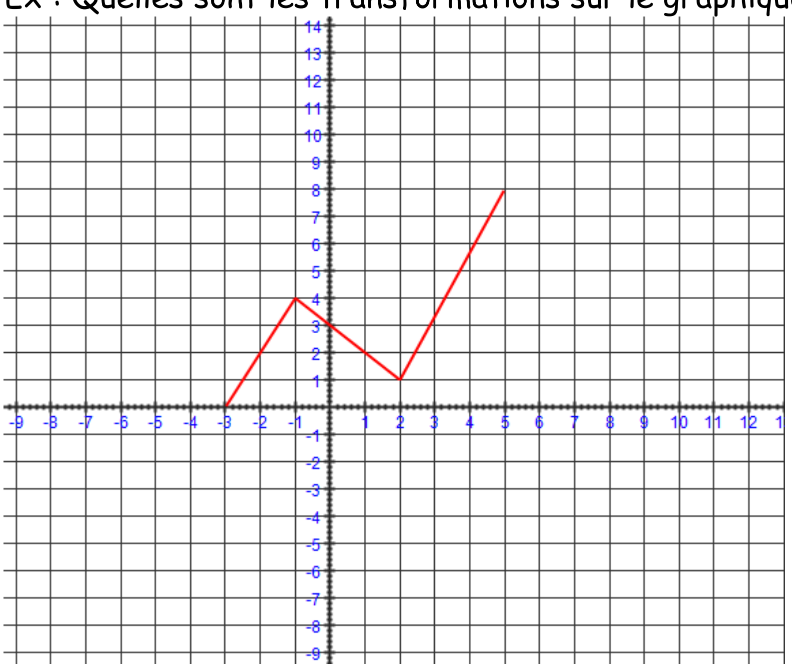
e) $N(x) = 4(3(x - 7))^2$

Mathématiques 30331C

Rôles des paramètres : $g(x) = \pm af\left(\pm b\left(x-c\right)\right)+d$

Transformations	Effet sur le graphe	Le point (x, y) devient
Réflexion verticale $y=-f\left(x\right)$	Réflexion par rapport à l'axe des x	$\left(x,y\right)\to\left(x,-y\right)$
Allongement ou rétrécissement vertical $y=af\left(x\right)$	si $\lvert a\rvert>1$, allongement vertical de $\lvert a\rvert$ si $0<\lvert a\rvert<1$, rétrécissement vertical de $\lvert a\rvert$	$\left(x,y\right)\to\left(x,ay\right)$
Réflexion horizontale $y=f\left(-x\right)$	Réflexion par rapport à l'axe des y	$\left(x,y\right)\to\left(-x,y\right)$
Allongement ou rétrécissement horizontal $y=f\left(bx\right)$	si $\lvert b\rvert>1$, rétrécissement horizontal de $\frac{1}{\lvert b\rvert}$ si $0<\lvert b\rvert<1$, allongement horizontal de $\frac{1}{\lvert b\rvert}$	$\left(x,y\right)\to\left(\frac{1}{b}x,y\right)$
Translation horizontale $y=f\left(x-c\right)$	si $c>0$, translation horizontale vers la droite si $c<0$, translation horizontale vers la gauche	$\left(x,y\right)\to\left(x+c,y\right)$
Translation verticale $y=f\left(x\right)+d$	si $d>0$, translation verticale vers le haut si $d<0$, translation verticale vers le bas	$\left(x,y\right)\to\left(x,y+d\right)$

Ex : Quelles sont les transformations sur le graphique de f(x) pour obtenir g(x) ?



a) g(x) = 2 f(3x + 9)

b) g(x) = f(-2x + 8) + 5

Exercices :

1. Donne la valeur de f(3) si $f(x) = 3(x - 1)^2 + 3$.

2. Décris comment les transformations appliquées à f(x), donne aussi ce que la coordonnée (2, 4) devient pour chaque cas.

a) $y = 2f(x) + 3$
b) $y = \frac{1}{2}f(x) - 2$
c) $y = f(x + 4) + 1$
d) $y = 3f(x - 5)$

e) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right) - 6$
f) $y = f(-2x - 4)$
g) $y = 4f(x - 6) + 2$
h) $y = -2f(x) - 3$

i) $y = f(-x + 1) - 1$
j) $y = -f(x - 3) + 1$
k) $y = 3f(2x) - 6$
l) $y = f(3(x + 4)) + 5$

m) $y = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}x\right) - 4$
n) $y = -2f(4x - 8)$
o) $y = f(4 - x) + 5$
p) $y = f(3x - 6) + 8$

Mathématiques 30331C

3.2 Modéliser des situations à l'aide de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie

- quadratique ($y = ax^2 + bx + c$, $y = a(x – h)^2 + k$)
- rôle des paramètres des fonctions à l'étude
- graphique de la courbe représentative de chaque fonction à l'étude

Une fonction polynomiale de degré 2 est aussi nommée fonction quadratique. Sa représentation graphique est une courbe nommée parabole. La parabole est symétrique par rapport à un axe vertical.

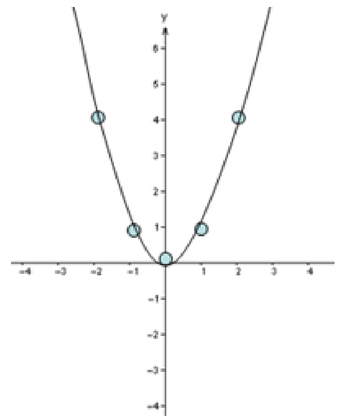
L'équation de base est $y = x^2$ voici ses propriétés.

Propriété	Données ou intervalles
Domaine	$]-\infty,\infty[$
Image	$[0,\infty[$
Zéros de la fonction	$\{0\}$
Ordonnée à l'origine	$\{0\}$
Intervalle de croissance	$[0,\infty[$
Intervalle de décroissance	$]-\infty,0]$
Intervalle positive	$]-\infty,\infty[$
Intervalle négative	Aucun
Maximum	Aucun
Minimum	$\{0\}$

Table des valeurs

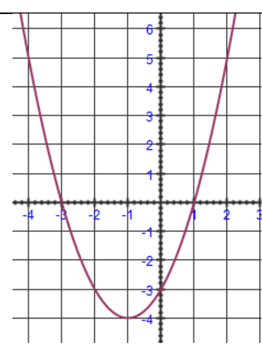
x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Graphique



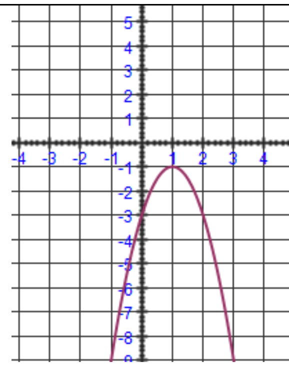
La complétion du carré nous permet de rendre la fonction quadratique sous sa forme générale $y = ax^2 + bx + c$ à la forme canonique $y = a(x-h)^2 + k$.

Exemple :

$y = x^2 + 2x - 3$ $y = 1(x^2 + 2x + 1 - 1 - 3)$ $y = (x + 1)^2 - 4$ Ouverte ↑ Sommet $(-1, -4)$		Domaine : $]-\infty,\infty[$ Image : $[-4,\infty[$ Zéros : -3 et 1 Ordonnée à l'origine $(0, -3)$ ↗ $[-1, \infty[$ ↘ $]-\infty,-1]$ + $]-\infty,-1] \cup [1, \infty[$ – $[-3, 1]$ Valeur minimum de -4 quand $x = 1$

Mathématiques 30331C

Exemple :

$y = -2x^2 + 4x - 3$ $y = -2(x^2 - 2x + 1 - 1 + {}^3/_2)$ $y = -2((x - 1)^2 + ½)$ $y = -2(x - 1)^2 - 1$ Ouverte ↓ Sommet $(1, -1)$		Domaine : $]-\infty,\infty[$ Image : $]-\infty, 1[$ Zéros : aucun Ordonnée à l'origine $(0, -3)$ ↗ $]-\infty,1]$ ↘ $[1, \infty[$ + jamais − $]-\infty,\infty[$ Valeur maximum de -1 quand $x = 1$

Forme générale

$$y = ax^2 + bx + c$$

Forme canonique

$$y = a(x-h)^2 + k$$

Sens de l'ouverture :
Si a > 0; vers le haut
Si a < 0, vers le bas

Sommet (h, k) ou $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

Équation de l'axe de symétrie, y = h

Extrêmum :
Si a>0; valeur min. de k quand x = h
Si a<0, valeur max. de k quand x = h

$$D =]-\infty,\infty[\ ; I = [k,\infty[\ si\ a > 0\ ou\ I =]-\infty, k]\ si\ a < 0$$

Exercice :

Donne le domaine, l'image, le sens d'ouverture, la coordonnée du sommet, l'équation de l'axe de symétrie, l'intervalle de croissance, de décroissance, positive, négative et l'extrémum de chaque fonction quadratique.

a) $G(x) = -3x^2$ b) $H(x) = 2(x - 7)^2 + 1$ c) $M(x) = -(x + 3)^2$

***Activité 1 p. 131; ***Activité 2 p. 132

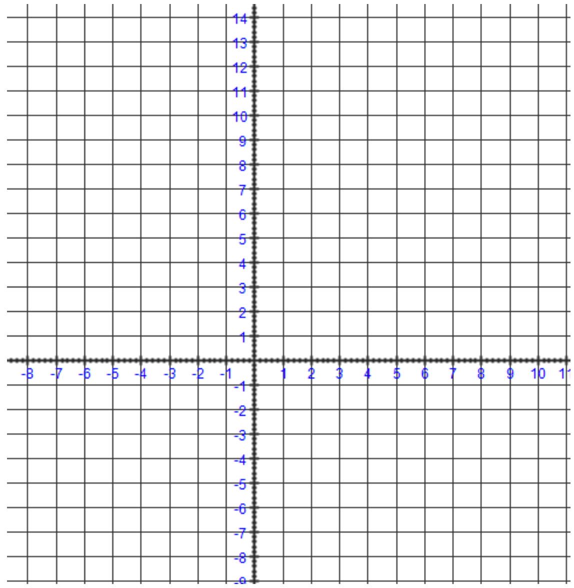
Mathématiques 30331C

- Représentation graphique d’une fonction quadratique à partir de sa règle

Le graphe d'une parabole peut facilement être tracé en obtenant les informations suivantes :

- Où se situe le sommet de la parabole ?
- La parabole est-elle ouverte vers le haut ou le bas ?
- Quelle est son ordonnée à l'origine ?
- Quelles sont les valeurs des racines ?

Exemple : Trace le graphique de la fonction $f(x) = (x - 1)^2 + 3$



$\boxed{a \times \{1, 3, 5, \dots\}}$

Exercices

Écris chaque fonction sous la forme $y = a(x - h)^2 + k$. Trace le graphique et donne le domaine, l’image, le sens d’ouverture, la coordonnée du sommet, l’équation de l’axe de symétrie, l’intervalle de croissance, de décroissance, positive, négative et l’extrémum de chaque fonction quadratique.

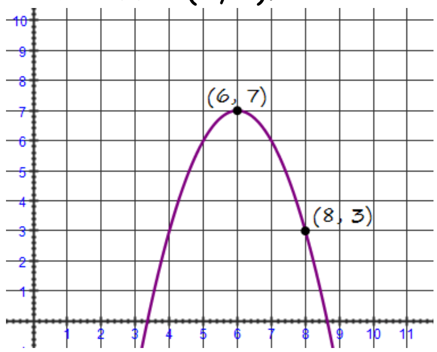
1. $y = x^2 + 6x + 3$
2. $y = x^2 + 10x + 30$
3. $y = 28 + 12x + x^2$
4. $y = -x^2 - 8x - 7$
5. $y = -2x - x^2$
6. $y = -2x^2 + 20x - 44$
7. $y = -3x^2 + 18x - 28$

Mathématiques 30331C

Recherche de la règle d'une fonction quadratique

Forme générale	Forme canonique	Avec les racines
$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$	$y = a(x - r_1)(x - r_2)$

Exemple 1 – Trouve la règle d'une parabole qui a comme sommet (6, 7) et qui passe par la coordonnée (8, 3).



Sommet $(h, k) = (6, 7)$

Coordonnée $(x, y) = (8, 3)$

$$y = a(x-h)^2 + k$$
$$3 = a(8-6)^2 + 7$$
$$3 - 7 = a(2)^2$$
$$-4 = 4a$$
$$a = -1$$

Remplace le a, h et k, laisse le x et y pour l'équation

$$y = -(x-6)^2 + 7$$

Exemple 2 : Si les racines sont (-2, 0) et (5, 0) et passe par (0,-20). Trouve l'équation de cette parabole.

$$f(x) = a(x - (-2))(x - 5)$$
$$-20 = a(0 + 2)(0 - 5)$$
$$-20 = a(2)(-5)$$
$$-20 = -10a$$
$$a = 2$$

$$f(x) = 2(x + 2)(x - 5)$$
$$f(x) = 2(x^2 - 5x + 2x - 10)$$
$$f(x) = 2x^2 - 6x - 20$$

*** Mise au point p. 159 # 2, 4, 5, 6, 8, 9

Exercice

Formule une équation qui définit chaque parabole (congruente signifie que la valeur de a est la même).

1. Congruente à $y = x^2$, ouverte vers le haut; S(2, -3)

2. Sommet (3,4) et a = 2

3. Congruente à $y = 2x^2$, val min. -4, axe sym; x=-3

4. S(1,3), passe par (2, -1)

5. S(-2, 1), ord. à l'origine est 3.

6. Passe par les points (0,0) et (2,4) et a = 1.

Mathématiques 30331C

3.6 Factoriser et développer des polynômes

- factorisation (*mise en évidence simple, différence de carrés, trinôme carré parfait*, trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$)

Factoriser une expression algébrique consiste à écrire sous la forme d'un produit de facteurs.

Mise en évidence simple : consiste à diviser le plus grand facteur commun de tous les termes de l'expression algébrique.

Exemple : $6a^2 + 15a = 3a(2a+5)$

Mise en évidence double : il faut regrouper les termes ayant un facteur commun, mettre le facteur commun en évidence dans chacun des groupes.

Exemple : $ab + 6 + 3b + 2a = ab + 2a + 3b + 6 = a(b+2) + 3(b+2) = (b+2)(a+3)$

Différence de deux carrés : lorsqu'on a une expression du type $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exemple : $36x^2 - y^2 = (6x-y)(6x+y)$

Trinôme carré parfait : Dans une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ et que $b = 2\sqrt{a} \times \sqrt{c}$.
On peut déterminer les facteurs en trouvant la racine carrée de ax^2, prendre le signe entre le ax^2 et le bx, ensuite prendre la racine carrée du c.

Exemple : $x^2 + 8x + 16 \rightarrow 8 = 2\sqrt{1} \times \sqrt{16}$ donc $(x+4)^2$

Mise en évidence double : il faut appliquer la mise en évidence simple à chaque groupe et refaire la mise en évidence si le binôme se répète.

> Le polynôme sera décomposable par cette méthode si le produit des 1er et 4e termes est égal au produit des 2e et 3e termes.

Exemple :

$6xy + 3x - 8y - 4 \rightarrow (6xy \times -4 = -24xy)$ et $(3x \times (-8y) = -24xy)$

$3x(2y+1) - 4(2y+1)$

$(2y+1)(3x-4)$

Mathématiques 30331C

Décomposition d'un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$

Essentiellement, il faut trouver deux nombres dont le produit donne ac et la somme b.

Exemple : $6x^2 + 11x + 4$

$ac = 6 \times 4 \qquad b = 11$

Donc, deux nombres dont le produit est 24 et la somme est 11.

$1 \times 24 = 24$, mais $1 + 24 = 25$

$2 \times 12 = 24$, mais $1 + 12 = 13$

$3 \times 8 = 24$ et $3 + 8 = 11$

Alors :

$$6x^2 + 11x + 4$$
$$6x^2 + \overbrace{3x + 8x}^{11x} + 4$$
$$3x(2x+1) + 4(2x+1)$$
$$(2x+1)(3x+4)$$

ou

$$\frac{(6x+3)(6x+8)}{6}$$
$$= \frac{3(2x+1)2(3x+4)}{6}$$
$$= (2x+1)(3x+4)$$

***Mise au point p. 96 #1 à 6

3.8 Modéliser des situations se traduisant par des équations ou des inéquations afin de résoudre des problèmes

- résolution d'équations (*factorisation*, complétion du carré, formule quadratique)

Pour résoudre une équation quadratique par <u>factorisation</u>, la première étape est de l'écrire sous la forme P(x) = 0, ensuite décomposer en facteurs ; placer chaque facteur égal à 0 et résoudre.

Exemple : $2(x^2 + x) = 20 - x$

$$2x^2 + 2x - 20 + x = 0$$
$$2x^2 + 3x - 20 = 0$$
$$\frac{(2x+8)(2x-5)}{2} = 0$$
$$(x+4)(2x-5) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 = 0$$
$$x = -4 \qquad x = \frac{5}{2}$$

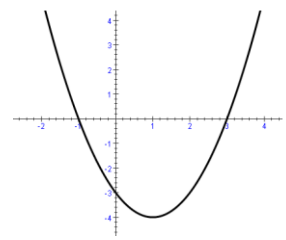
$\_\_ \times \_\_ = -40$

$\_\_ + \_\_ = 3$

Une deuxième méthode pour trouver les racines est la <u>complétion du carré</u>, on fait le même travail que ce qu'on faisait pour placer l'équation sous la forme canonique, mais on doit ajouter des étapes car on cherche les valeurs de x lorsque y = 0.

Ex :

$$
\begin{gathered}
y = x^2 - 2x - 3 \\
0 = \left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 - 3 \\
0 = \left(x - 1\right)^2 - 4 \\
4 = \left(x - 1\right)^2 \\
\sqrt{4} = \sqrt{\left(x - 1\right)^2} \\
2 = \pm\left(x - 1\right) \\
x - 1 = \pm 2 \\
x = 1 \pm 2 \\
x = 1 + 2 = 3 \qquad x = 1 - 2 = -1
\end{gathered}
$$



Si on arrive à une réponse qui n'a pas une racine entière, on peut laisser la réponse avec la racine, mais il faut la simplifier.

$$
\begin{gathered}
2x^2 - 4x - 7 = 0 \\
2\left[\left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 - \frac{7}{2}\right] = 0 \\
\frac{2}{2}\left[\left(x - 1\right)^2 - \frac{2}{2} - \frac{7}{2}\right] = \frac{0}{2} \\
\left(x - 1\right)^2 - \frac{9}{2} = 0 \\
\left(x - 1\right)^2 = \frac{9}{2} \\
\sqrt{\left(x - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} \\
\pm\left(x - 1\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\
x - 1 = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \\
x = \frac{1 \pm 3\sqrt{2}}{2}
\end{gathered}
$$

Divise partout par la valeur de « a ».

Place les x dans la parenthèse pour compléter le carré.

Fais la racine carrée de x^2 et le deuxième terme divisé par 2x.

Élève ce résultat au carré, et place-le au lieu des espaces.

Parce que c'est un zéro de l'autre côté du signe égale on peut diviser par « a » de chaque côté.

Emporter ce qui n'est pas dans la parenthèse de l'autre côté du signe égale.

Faire la racine carrée de chaque côté.

Quand on fait la racine d'une variable, le résultat est $\pm$, mais il est plus facile de le placer avec le nombre de l'autre côté du signe égal.

Mettre le x seul.

Une troisième méthode pour trouver les racines est la formule quadratique qui est trouvée à partir de la complétion du carré.
Si on part de l'équation générale $ax^2 + bx + c = 0$ et qu'on fait la complétion du carré, on arrive à l'équation quadratique.

Cas général

$ax^2 + bx + c = 0$

$$a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b-4ac}{4a^2}=0$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b-4ac}{4a^2}}=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Donc $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Exemple

$2x^2 + 3x - 1 = 0$

$$2\left[\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3^2}{4^2}\right)-\frac{3^2}{4^2}-\frac{1}{2}\right]=0$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{8}{16}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{17}{16}}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

Ex : Résous $3x^2 + 5x - 2 = 0$.
Pour remplacer dans la formule, on prend $a = 3$, $b = 5$ et $c = -2$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6}$$

$$x=\frac{-5\pm 7}{6}$$

$$x=\frac{-5+7}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\quad \text{ou}\quad x=\frac{-5-7}{6}=\frac{-12}{6}=-2$$

***Mise au point p. 97 # 9 à 16

Mathématiques 30331C

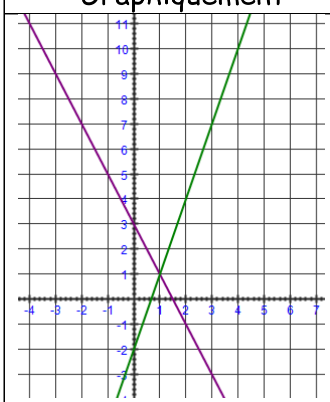
3.5 Modéliser et résoudre des problèmes qui se traduisent par un système d'équations ou d'inéquations

- systèmes de 2 équations à 2 inconnues
- systèmes de 3 équations à 3 inconnues
- inéquations du premier degré *à une variable* ou à deux variables (modélisation d'une situation, représentation graphique de l'ensemble solution, résolution d'inéquations)
- système d'inéquations linéaires (représentation graphique de l'ensemble solution, polygone de contraintes)
- optimisation (règle : fonction de l'objectif, évaluation, prise de décision)

Un système d'équations est un ensemble de plusieurs équations faisant appel aux mêmes inconnues.

Exemple : Soit le système : $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 3x-y=2 \end{cases}$.

Nous avons déjà vu des méthodes pour résoudre des systèmes d'équations.

Graphiquement	Par substitution	Par élimination
 Solution (1, 1)	$4x+2y=6$ $4x+2(3x-2)=6$ $4x+6x-4=6$ $10x=10$ $x=1$ $y=3x-2$ $y=3(1)-2$ $y=1$ Solution (1, 1)	$[1]\quad 4x+2y=6$ $[2]\quad -3x+y=-2$ $[1]\quad 4x+2y=6$ $[2]\times 2\quad -6x+2y=-4$ $[1]-[2]\quad 10x=10$ $x=1$ $[1]\quad 4(1)+2y=6$ $2y=2$ $y=1$ Solution (1, 1)

On peut voir que les graphiques peuvent se couper en un point (une solution), être parallèle donc ne jamais se toucher (aucune solution), ou être coïncidentes (ou confondues) (avec une infinité de solutions).

Graphiques	Pentes	Coordonnées à l'origine	Nombre de solutions
Droites qui se coupent	Différentes	Différentes, sauf si les droites se coupent sur un axe	Une solution
Droites parallèles	Identiques	Différentes	Aucune solution
Droites coïncidentes ou confondues	Identiques	Identiques	Infinité de solutions

****OMN 1.3 Par substitutions p. 26 # 9, 11, 13, 15, 17, 19, 29ab, 30, 31, 32, 33, 34*

Résous chaque système d'équations par substitution. Vérifie chaque solution.

9. $x - y = 1$
$3x + y = 11$

10. $2x - y = 13$
$x + 2y = -6$

11. $3a + 4b = 15$
$a + b = 5$

12. $2x + 3y = 5$
$x - 4y = -14$

13. $2c - d + 2 = 0$
$3c + 2d + 10 = 0$

14. $4x - y = 3$
$6x - 2y = 5$

15. $a + 4b = 3$
$5b = -2a + 3$

16. $3e - f - 2 = 0$
$5e + 2f = 3$

17. $2x - 5y = 12$
$x + 10y = -9$

18. $x - 2y = 5$
$2x - 3y = 6$

19. $2r - s = 2$
$3r - 2s = 3$

20. $x + 3y = 0$
$3x - 6y = 5$

32. Construction de pont Le pont suspendu par câbles le plus long au monde est le pont Akashi Kaikyo, situé au Japon. Ce pont possède une travée longue et deux travées courtes. Chaque travée courte est deux fois moins longue que la travée longue. La longueur totale du pont est de 3 560 m. Quelle est la longueur de chaque travée ?

33. Appels de service ABC Plomberie demande 70 $ pour un appel de service, plus 50 $ pour chaque heure de travail. Qualité Plomberie demande 52 $ pour un appel de service, plus 54 $/h. Décris dans quelles situations chaque entreprise est meilleur marché.

34. Oiseaux canadiens Le nombre total d'espèces de hiboux et de pigeons qui élèvent leurs petits au Canada est de 17. Si tu soustrais 1 de cinq fois le nombre d'espèces de pigeons, tu obtiens le nombre d'espèces de hiboux. Trouve le nombre d'espèces de chaque type qui élèvent leurs petits au Canada.

29. Simplifie chaque système, puis résous-le par substitution. Vérifie chaque solution.

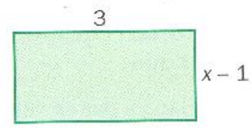
a) $2(x - 4) + y = 6$
$3x - 2(y - 3) = 13$

b) $2(x - 1) - 3(y - 3) = 0$
$3(x + 2) - (y - 7) = 20$

c) $2(3x - 1) - (y + 4) = -7$
$4(1 - 2x) - 3(3 - y) = -12$

30. Nombres La somme de deux nombres est 752, et leur différence est 174. Quels sont ces deux nombres ?

31. Mesure Ce rectangle a une aire de m unités carrées et un périmètre de $2m$ unités. Quelle est la valeur de x ?



****OMN 1.5 Par élimination p. 38 # 7 – 15 (I), 27, 29, 31, 33, 35, 44, 45, 46, 47, 48*

Résous chaque système par élimination. Vérifie chaque solution. Si un des systèmes n'a pas une solution unique, indique s'il n'a aucune solution ou s'il a un nombre infini de solutions.

7. $x + 2y = -3$
$2x + 3y = -4$

8. $8c - 3d = -10$
$2c - 5d = 6$

9. $4x + 3y = 15$
$8x - 9y = 15$

10. $3r + 2s = 5$
$9r + 6s = 7$

11. $2x - 3y = 2$
$5x + 6y = 5$

12. $4x - 3y = 5$
$8x - 6y = 10$

13. $3a + 2b = 16$
$2a + 3b = 14$

14. $3m + 4n = -1$
$4m - 5n = -22$

15. $5p + 3q = -19$
$2p - 5q = 11$

16. $2x - 3y = 15$
$5x - 2y = 10$

Résous par élimination. Vérifie chaque

27. $3(x + 2) - (y + 7) = -1$
$5(x + 1) + 4(y - 3) = -24$

28. $5(m - 3) + 2(n + 4) = 10$
$3(m + 4) - 4(n + 3) = -21$

29. $2(a - 4) + 5(b + 1) = 8$
$3(a - 1) - 2(b - 2) = -11$

30. $4(x - 1) - 3(y + 4) = -11$
$3(x + 4) + 5(y - 6) = -7$

Résous par élimination.

31. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2$
$\frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 0$

33. $\frac{x+2}{6} - \frac{3(y+2)}{2} = 1$
$\frac{x-2}{2} + \frac{y-1}{3} = 0$

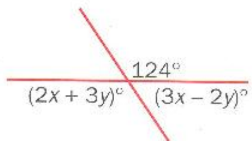
35. $0{,}3x - 0{,}5y = 1{,}2$
$0{,}7x - 0{,}2y = -0{,}1$

44. Os humains Les bébés et les adultes n'ont pas le même nombre d'os, car certains os fusionnent entre la naissance et l'âge adulte. Les équations suivantes représentent la relation entre le nombre moyen d'os chez les adultes, a, et le nombre moyen d'os chez les bébés, b.

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{5}=173$$
$$\frac{a}{3}+\frac{b}{6}=127$$

Détermine le nombre moyen d'os chez les adultes et chez les bébés.

45. Mesure Utilise ce diagramme pour déterminer les valeurs de x et de y.



46. Nombres La moyenne de deux nombres est 5. La somme de quatre fois un des nombres et trois fois l'autre nombre est 2. Quels sont ces nombres ?

47. Bateau patrouilleur Il faut à un bateau patrouilleur 5 heures pour parcourir 60 km à contre-courant et 3 heures pour faire le voyage de retour dans le sens du courant. Détermine la vitesse du bateau en eau calme ainsi que la vitesse du courant.

48. Vitesse de vol Quand il vole avec un vent arrière, un avion met 4 heures à franchir les 2 200 km qui séparent Saskatoon de Toronto. Le voyage de retour, dans un vent debout, dure 5 heures. Détermine la vitesse de l'avion lorsque l'air est calme ainsi que la vitesse du vent.

****Visions Mise au point p. 222 # 1-19*

Il peut y avoir des systèmes d'équations à trois variables, donc on doit trouver trois réponses. On procède par élimination comme on l'a fait pour un système à deux variables. On prend deux équations à la fois et on élimine la même variable à chacun. Il va donc nous rester deux équations à deux variables et on sait comment résoudre ceci.

Exemple :

$\boxed{1}$ $2x - 4y + 6z = 30$
$\boxed{2}$ $-3x + 8y - z = 49$
$\boxed{3}$ $x - 2y + z = -5$

▹

$\boxed{1}$ $2x - 4y + 6z = 30$
$\boxed{2}$ $-3x + 8y - z = 49$

$\boxed{1} \times 2$ $4x - 8y + 12z = 60$
$\boxed{2}$ $-3x + 8y - z = 49$

$\boxed{1} + \boxed{2}$ $x + 11z = 109$

▹

$\boxed{1}$ $2x - 4y + 6z = 30$
$\boxed{3}$ $x - 2y + z = -5$

$\boxed{1}$ $2x - 4y + 6z = 30$
$\boxed{3} \times 2$ $2x - 4y + 2z = -10$

$\boxed{1} - \boxed{3}$ $4z = 40$
$z = 10$

▹

$x + 11z = 109$
$x + 11(10) = 109$
$x + 110 = 109$
$x = -1$

▹

$2x - 4y + 6z = 30$
$2(-1) - 4y + 6(10) = 30$
$-4y = 30 + 2 - 60$
$-4y = -28$
$y = 7$

▹ $(-1, 7, 10)$

Exemple : Résoudre

$x + y + z = -1$
$2x + 3y - z = 5$
$3x - 2y - z = 0$

****OMN 1.6 Trois variables p. 44 #11, 13, 15, 17, 37, 39, 42, 43, 45, 49, 54, 57*

Mathématiques 30331C

Omn 1.6 p. 44
Résous et vérifie.

11. $\begin{aligned} a+b+3c&=12\\ 2a+b+3c&=14\\ a-b+4c&=13 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 3b+4c+d&=-1\\ b-4c-2d&=12\\ 2b+4c-3d&=9 \end{aligned}$

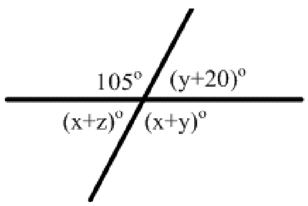
15. $\begin{aligned} 2x+3y+z&=15\\ 3x+2y-z&=10\\ 4x+y+2z&=15 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 5a+2b-3c&=11\\ 3a-5b+c&=-13\\ a-2b-c&=5 \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}&=7\\ \frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}&=6\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}&=9 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} 5x+2y-3z&=-1\\ 10x-y+6z&=6\\ 5x+3y+9z&=7 \end{aligned}$

42. Mesure – Trouve la valeur de x, de y et de z.



43. Nombres – Quand on additionne trois nombres deux à deux, on obtient les sommes 22, 39 et 45. Quels sont ces trois nombres?

45. Mesure – Dans le triangle ABC, la somme de $\angle A$ et $\angle B$ est égale à $70°$ de plus que la mesure de $\angle C$. La somme de $\angle B$ et $\angle C$ est égale à $16°$ de plus que la mesure de $\angle A$. Quelle est la mesure de chacun des angles de ce triangle?

49. Littérature – La romancière canadienne Margaret Laurence (1926-1987) est née au Manitoba et a passé une grande partie de sa vie au Canada. Elle a également vécu en Angleterre et dans deux pays d'Afrique. Elle a vécu 3 ½ fois plus de temps au Canada qu'en Angleterre. Elle a vécu 5 années de plus en Angleterre qu'en Afrique. Pendant combien d'années a-t-elle vécu au Canada?

54. Placements – Benoit a placé 20000$. Il a placé une partie de ce montant dans un dépôt à terme qui produit 4% d'intérêt par année, trois fois plus dans une obligation d'épargne qui produit 5% d'intérêt par année, et le reste dans une deuxième hypothèque qui produit 7% d'intérêt par année. Si Benoit a reçu un montant d'intérêt total de 1130$ en un an, quelle somme a-t-il investit à chaque taux?

Optimisation

Une inéquation est une contrainte sur une (ou plusieurs) inconnue(s), où l'expression de la contrainte contient un des signes < ≤ ≥ ou >.

Les différents signes d'inéquations :

<	>	≤	≥	≠
strictement inférieur (plus petit que)	strictement supérieur (plus grand que)	inférieur ou égal (plus petit ou égal)	supérieur ou égal (plus grand ou égal)	différent de
seulement les nombres inférieurs au nombre	seulement les nombres supérieurs au nombre	les nombres inférieurs et le nombre	les nombres supérieurs et le nombre	tous les nombres sau le nombre

Propriétés :

1) Si on ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on ne change pas le sens de cette inégalité
2) Si on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif on ne change pas le sens de cette inégalité.
3) Si on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif on change le sens de l'inégalité

Exemple : Trouver x tel que.

a) $x - 2 \geq 5$ b) $ax + b < cx + d$ c) $3x - 2 \geq x + 4$ d) $3x + 4 > 5x + 6$

La représentation graphique d'une inéquation à une variable se fait sur une droite numérique.

Exemple : $x < 7$

$]-\infty, 7[$

$x \geq 4$

$[4, \infty[$

Exercices

a) $x - 5 < 2x + 7$ b) $-4x + 10 \geq 5x - 19$ c) $2{,}5\,(x + 4) < 0{,}5x - 15$ d) $3 - 4x > 7$

Donne l'inéquation qui correspond si « x » est la variable.

1) Jean a au moins 2 chats.
2) Charles a moins de 12$ dans ses poches.
3) Pour avoir assez de nourriture pour diner, ça me coûte moins de 5$.
4) Une sortie au théâtre me coûte au plus 25$.

Pour la résolution de problèmes, il suffit de trouver les inéquations correspondantes et résoudre.

Mathématiques 30331C

Exemple : Pour amasser des fonds, les bénévoles d'une association d'alpinisme vendent des piolets, c'est-à-dire, des cannes d'alpiniste. Le coût de fabrication de ces piolets comprend des frais généraux fixes de 2000$, plus 10$ par piolet. Les piolets coûtent 30$ chacun. Combien de piolets l'association doit-elle vendre pour que les recettes excèdent le coût de fabrication?

Soit x, le nombre de piolets
C, le coût de fabrication
R, les revenus

C = 2000 + 10x
R = 30x
Pour qu'ils fassent plus d'argent que le coût des piolets, il faut que R > C, donc

$$R > C$$
$$30x > 2000 + 10x$$
$$20x > 2000$$
$$x > 100$$

L'association doit vendre plus de 100 piolets avant de commencer à faire de l'argent.

**** OMN 2.1 Inéquations linéaires à une variable p. 63 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 29, 31, 33, 41, 47, 51, 53, 54, 55,*

Résous et vérifie ta solution.

1. $y+9<11$
2. $2w+5>3$
3. $3x-4\geq 5$
4. $2z+9\leq 3$
5. $-3x<6$
6. $4t>3t-4$
7. $2(m-3)\leq 0$
8. $4(n+2)\geq 8$

Résous et vérifie ta solution.

9. $2x+1>2$
10. $3x+4<2$
11. $6y+4\leq 5y+3$
12. $4z-3\geq 3z+2$
13. $7+3x<2x+9$
14. $5(2x-1)>5$
15. $2(3x-2)\leq -4$
16. $4(2x+1)\geq 2$

Résous. Représente graphiquement la solution.

17. $6x+2\leq 4x+8$
18. $4x-1>x+5$
19. $2(x+3)<x+4$
20. $3(x-2)>x-4$
21. $3(y+2)\geq 2(y+1)$
22. $3(2z-1)\leq 2(1+z)$
23. $6x-3(x+1)>x+5$
24. $2(x-2)-1<4(1-x)+1$

Résous.

25. $6-2x>4$
26. $8-3x<5$
27. $3y-8\geq 7y+8$
28. $6-3c\leq 2(c-2)$
29. $4(1-x)\geq 3(x-1)$
30. $-2(3+x)<4(x-2)$
31. $4x-3(2x+1)\leq 4(x-3)$
32. $2(3t-1)-5t>-6(1-t)+7$

Résous. Représente graphiquement la solution.

33. $\frac{y}{3}+2<1$
34. $\frac{w}{2}+2>3$
35. $\frac{2x}{3}+1\geq 2$
36. $\frac{3z}{4}+5\leq -1$
37. $1{,}2x-0{,}1>3{,}5$
38. $0{,}8x+2{,}5<-2{,}3$
39. $1{,}9\geq 4{,}9-1{,}5q$
40. $4{,}6-1{,}8n\leq -0{,}8$

Résous.

41. $2(1{,}2a+2{,}5)>0{,}2$
42. $4(1{,}8-0{,}5x)\leq 5{,}2$
43. $0{,}75y-2{,}6<0{,}25y-3{,}1$
44. $3(1{,}3n+0{,}3)\geq 3{,}5n+0{,}1$
45. $1{,}5(x+2)+1>2{,}5(1-x)-0{,}5$
46. $2(1{,}5x+1)-1<5(0{,}2x+0{,}3)-0{,}5$

Résous.

47. $\frac{x+1}{2}<\frac{x+2}{3}$
48. $\frac{2-x}{2}\geq\frac{2x+1}{4}$
49. $\frac{z+2}{4}>\frac{z-1}{5}+1$
50. $\frac{2-3x}{2}+\frac{2}{3}\leq\frac{3x-2}{6}$

Applications et résolution de problèmes

51. Fournitures d'artiste Katrina a un chèque-cadeau de 50 \$ qu'elle peut échanger dans un magasin de fournitures d'artiste. Elle veut acheter une tablette à croquis et quelques marqueurs. Avec les taxes, la tablette coûte 18 \$ et chaque marqueur coûte 4 \$. Utilise l'inéquation $4m+18\leq 50$ pour déterminer combien de marqueurs, m, Katrina peut acheter avec son chèque-cadeau.

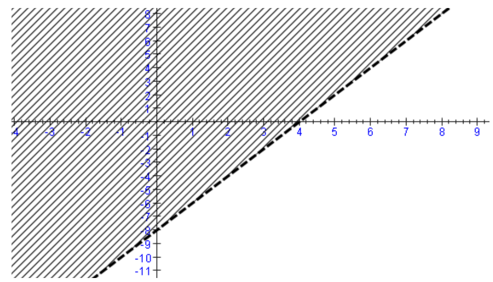
53. Mesure Dans le triangle ABC, $\angle A$ est obt et mesure $5x+10$ degrés. Résous les inéquation $5x+10>90$ et $5x+10<180$ afin de déterminer les valeurs possibles de x.

55. Salaire hebdomadaire Mario gagne 15 \$/h après impôt et autres déductions. En tout, il dépense 75 \$ par semaine pour ses repas du midi et ses déplacements.

a) Écris une expression qui représente le montant dont Mario dispose à la fin d'une semaine où il a travaillé pendant t heures.

b) Écris une inéquation pour déterminer le nombre d'heures pendant lesquelles Mario doit travailler s'il veut avoir au moins 450 \$ à la fin de la semaine. Résous ton inéquation.

Certains énoncés peuvent se traduire par des inéquations à deux variables. Il importe donc de bien identifier ces deux variables et d'établir la relation entre elles en choisissant le symbole d'inégalité approprié ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$). L'ensemble solution est l'ensemble des couples qui satisfont l'inéquation. Pour représenter graphiquement des inéquations à deux variables, on trace la droite comme d'habitude, s'il n'y a pas de signe = avec le > ou <, on fait la ligne pointillée au lieu d'unie. Ensuite, on se place sur un des points de la droite, n'importe lequel, et ce point représente le y. Si l'inéquation est y <, on hachure le bas de la droite, si l'inéquation est y >, on hachure le haut de la droite.



Exemple $2x - y < 8$ il faut placer le y seul d'un côté

$-y < -2x + 8$

$y > 2x - 8$

donc la pente est 2 et l'ordonnée à l'origine est -8

Le plan est donc divisé en deux régions, ou demi-plans.
La droite qui sépare les deux plans est appelée **ligne de partage ou courbe frontière.**
Les deux régions correspondent à $y < 2x - 8$ et $y > 2x - 8$

Restrictions : on doit spécifier les valeurs que le variable peut prendre
Ex : lorsqu'on parle d'une longueur, on sait qu'elle ne peut pas être négative.

Lorsqu'on trace le graphique y en fonction de x, le x va sur la ligne horizontale et le y sur la ligne vertical.
Ex : Trace le graphique de $L + 2l = 4$ en fonction de l. On placerait le l sur l'horizontal et le L sur la verticale.

****Mise au point p. 245 # 1à 7abd, 9, 10, 12*
****Vue d'ensemble p. 254 #2ab, 3, 4, 8, 19*
****Réactivation 1 p. 266*
****Mise à jour p. 273 #2 à 6*
****Activité 1 p. 278*
****Activité 2 p. 279*

Mathématiques 30331C

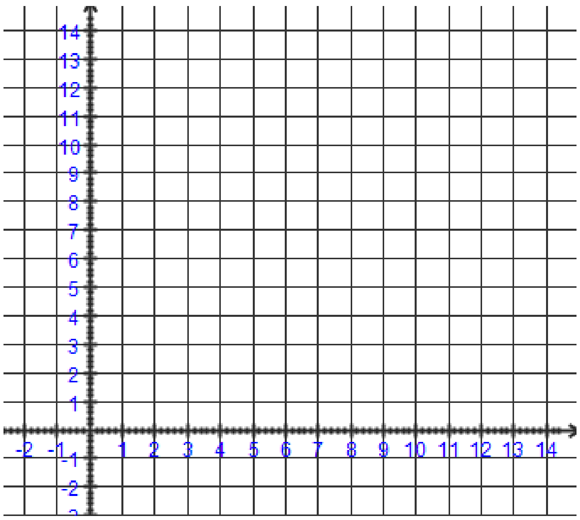
Polygone de contraintes

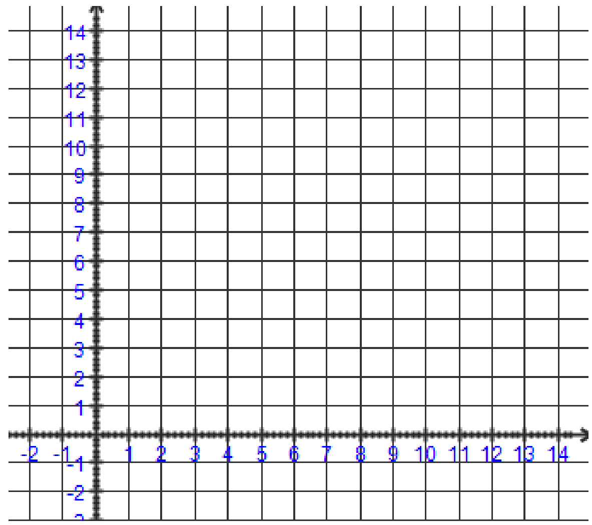
Lorsqu'un système d'inéquations du premier degré à deux variables traduit un ensemble de contraintes, la représentation graphique de l'ensemble solution est un polygone de contraintes. Le polygone est dit borné lorsque la figure qui lui est associée est fermée. Autrement, il est dit non-borné.

Exemple :

1. $y \geq 2 \quad y \leq 2x \quad x + 2y \leq 12$

2. $x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x + 2y \geq 12 \quad 2x + y \geq 8$





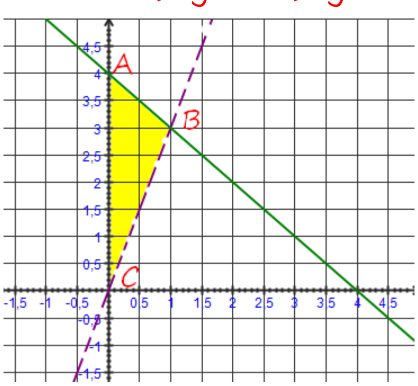
Dans la plupart des situations réelles, les variables ne peuvent pas être inférieures à 0. On ajoute donc au système deux inéquations appelées contraintes de positivité. Exemple, si on parle $, de personnes, de longueur etc… ces quantités ne peuvent pas prendre de valeur négative.

Sommets d'un polygone de contraintes

Pour déterminer les coordonnées d'un sommet d'un polygone de contraintes, on doit résoudre le système formé des deux équations associées aux droites qui forment ce sommet.

- Il est possible de les déterminer graphiquement ou algébriquement.
- Un sommet fait partie de la région-solution si toutes les droites frontières à ce sommet sont tracées d'un trait plein.

Ex : $x \geq 0; \quad y > 3x; \quad y \leq 4 - x$



- Le sommet A fait partie de la solution car toutes les droites qui le forment sont pleines.
- Les sommets B et C ne font pas partie de la solution car une des droites qui le forment est pointillée.

**** Mise au point p. 283# 1 à 8, 10 à 15*

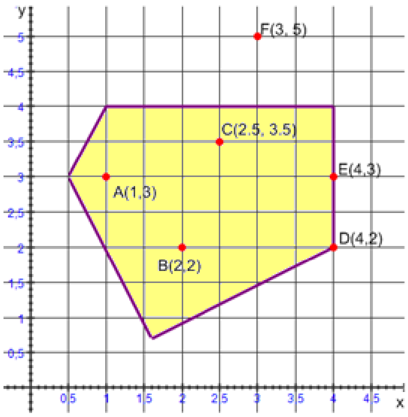
Mathématiques 30331C

Optimisation

Fonction à optimiser – dans certaines situations faisant intervenir un ensemble de contraintes, l'objectif visé se traduit par la recherche de solution la plus avantageuse, dans certains cas on veut la solution minimale tandis que dans d'autres cas, on cherche la solution maximale.

Pour trouver la fonction à optimiser, on doit trouver l'équation de la forme $z = ax + by + c$ qui correspond avec l'objectif visé.

Exemple : Voici un polygone de contraintes et les coordonnées de certains points. La règle de la fonction à optimiser est $z = 4x + 2y$



****Activité 1 p. 290*
****Mise au point p. 293 # 1à10, et 12*

En remplaçant les sommets du polygone de contraintes dans la fonction $z = ax + by + c$, on peut trouver celui qui engendre la valeur optimale.

Résolution d'un problème d'optimisation (p. 305)

Exemple : Un constructeur d'automobiles qui produit des voitures compactes et des mini fourgonnettes désire maximiser son profit hebdomadaire. Les profits générés sont de 4 K\$ pour chaque voiture compacte et de 10 K\$ pour chaque mini fourgonnette. Sa capacité de production hebdomadaire est au plus 2100 véhicules, et il doit produire chaque semaine au moins 1000 voitures compactes et au moins 200 mini fourgonnettes. Le nombre de voitures compactes produites doit être au moins 2 fois plus grand que le nombre de mini fourgonnettes.

****Mise au point p. 306 #*

Mathématiques 30331C

3.8 modéliser des situations se traduisant par des équations ou des inéquations afin de résoudre des problèmes

- résolution d'inéquations quadratiques (*factorisation*, complétion du carré, formule quadratique)

Inéquations quadratiques : Résoudre algébriquement

$$3x^2 - x < 4$$

$$3x^2 - x - 4 < 0$$

$$\frac{(3x-4)(3x+3)}{3} < 0$$

$$\frac{(3x-4)3(x+1)}{3} < 0$$

$$(3x-4)(x+1) < 0$$

		-1		$4/3$	
$3x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
( )( )	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $\left]-1, \frac{4}{3}\right[$

Ou juste sur la droite numérique

Donc $\left]-1, \frac{4}{3}\right[$

Exercice

1. a) $2x^2 - x - 3 \le 0$ b) $2x^2 - 5x > 3$ c) $0,5x^2 - x < 3$