Mathématiques 30331-C

BLOC 2

Régularité et algèbre (+- 13 cours)

3 - Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

3.1 Analyser diverses propriétés de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie
- Modèles mathématiques
- Rôle des paramètres
- *Mode de représentations*
- *Propriété d'une fonction*

Propriétés d'une fonction : domaine et image, image d'une valeur du domaine, valeur(s) du domaine associées à une image, extremum (maximum et minimum), équation de l'axe de symétrie, variation (croissance et décroissance), coordonnées du sommet, zéro et valeur initiale, signe + et -, ordonnées et abscisse(s) à l'origine

3.2 Modéliser des situations à l'aide de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie
- Valeur absolue : $y = a|b(x - h)| + k$
- rôle des paramètres des fonctions à l'étude
- graphique de la courbe représentative de chaque fonction à l'étude

La valeur absolue d'un nombre permet de considérer ce nombre sans tenir compte de son signe, celle-ci représente la distance entre 0 et ce nombre. On exprime la valeur absolue d'un nombre en plaçant entre deux traits verticaux.

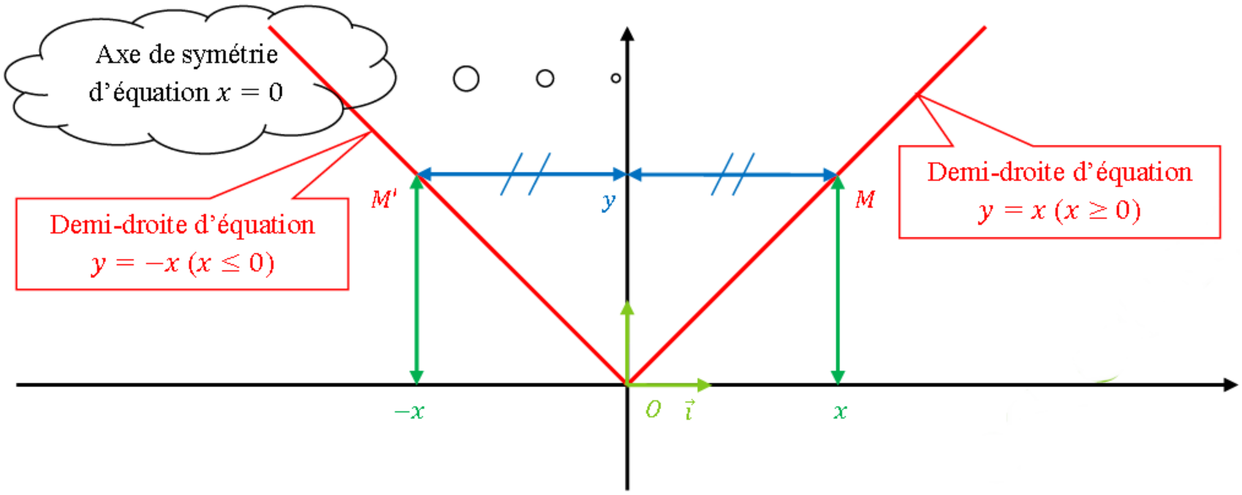
Ex : a) $|3| =$ b) $|-8| =$ c) $-|92,1| =$

Les propriétés des valeurs absolues permettent d'effectuer des opérations qui font intervenir des valeurs absolues.

Propriété	Exemple
$\|a\| \geq 0$	$\|-2,5\| \geq 0$, car $2,5 \geq 0$
$\|a\| = \|-a\|$	$\|6\| = \|-6\| = 6$
$\|a \times b\| = \|a\| \times \|b\|$	$\|6 \times -4\| = \|6\| \times \|-4\| = 6 \times 4 = 24$
$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$, où $b \neq 0$	$\left\|\frac{-16}{4}\right\| = \frac{\|-16\|}{\|4\|} = \frac{16}{4} = 4$

***Activité 1 p. 23
***Activité 2 p. 24

Représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$ et de son axe de symétrie



La règle d'une fonction valeur absolue peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\left|b\left(x-h\right)\right| + k$ où $a \ne 0$ et $b \ne 0$. Toutefois, les propriétés des valeurs absolues permettent de transformer cette règle sous la forme canonique $f(x) = a\left|x-h\right| + k$

Ex : 1) $\begin{aligned} f(x) &= -3\left|2\left(x-8\right)\right| + 5 \\ &= -3 \times \left|2\right| \times \left|x-8\right| + 5 \\ &= -3 \times 2 \times \left|x-8\right| + 5 \\ &= -6\left|x-8\right| + 5 \end{aligned}$	Ex : 2) $\begin{aligned} f(x) &= -3\left|2\left(x-8\right)\right| + 5 \\ &= -3 \times \left|2\right| \times \left|x-8\right| + 5 \\ &= -3 \times 2 \times \left|x-8\right| + 5 \\ &= -6\left|x-8\right| + 5 \end{aligned}$

Recherche de la règle d'une fonction valeur absolue

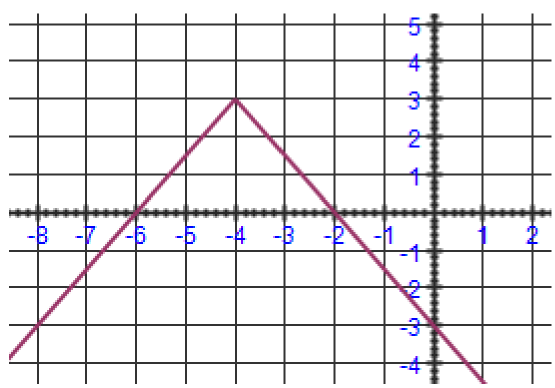
Si on connait le sommet (h, k) ainsi qu'un autre point.

Exemple : S(-4, 3) et P(2, -6)

$$\begin{aligned} y &= a\left|x-h\right| + k \\ -6 &= a\left|2-\left(-4\right)\right| + 3 \\ -9 &= a\left|6\right| \\ -9 &= 6a \\ a &= \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

$$y = a\left|x-h\right| + k$$

$$y = \frac{-3}{2}\left|x+4\right| + 3$$



***Mise au point (partie 1) p. 29 # 1, 2a-d, 3, 4, 5

Mathématiques 30331-C

3.8 Modéliser des situations se traduisant par des équations ou des inéquations afin de résoudre des problèmes

- résolution d'équations et d'inéquations avec valeurs absolues

Résolution d'une équation valeur absolue à une variable

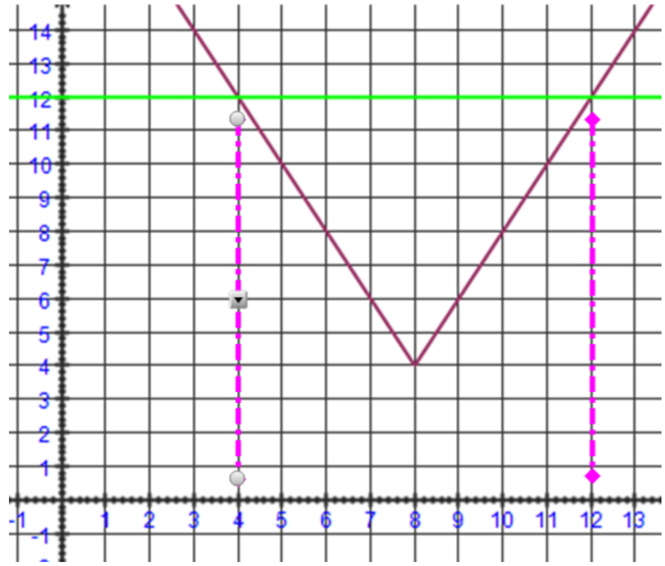
Par définition, on a : $|x| = x, si\ x \geq 0\ \ et\ \ |x| = -x, si\ x < 0.$

Donc, pour résoudre

$$2|x-8|+4=12$$
$$2|x-8|=8$$
$$|x-8|=4$$

d'après la définition

$$x-8=4 \quad ou \quad x-8=-4$$
$$x=12 \quad ou \quad x=4$$



Exercice :

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $|x - 2| = 7$ b) $|x - 2| = 0$ c) $|x - 2| = -6$

d) $|2x - 3| = 0$ e) $2|2x + 12| = 4$ f) $|x| + 5 = 0$

g) $\left|\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right| = 1$ h) $|-2(x-1)| = 2$ i) $|x| = x + 2$

***Mise au point (partie 2) p. 31 # 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 18a-b, 19, 20, 21

Mathématiques 30331-C

Résolution d'une inéquation valeur absolue à une variable.

Ex : $2|3x-6|<18$

$|3x-6|<9$

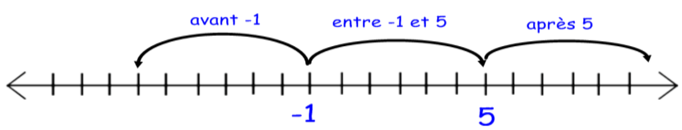
On trouve les valeurs de x pour une équation en remplaçant le signe d'inéquation par un signe =.

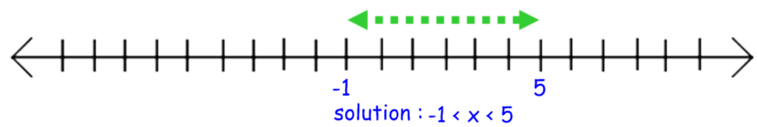
$3x-6=9$ ou $3x-6=-9$

$3x=15 \qquad 3x=-3$

$x=5 \qquad x=-1$

Vérifie une valeur dans chacune des intervalles.





Si je remplace par $x=-2$

$|3(-2)-6|<9$

$|-12|<9$

$12<9$

Non

Si je remplace par $x=0$

$|3(0)-6|<9$

$|-6|<9$

$6<9$

oui

Si je remplace par $x=6$

$|3(6)-6|<9$

$|12|<9$

$12<9$

Non

Exercice :

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $|x-2|<7$

b) $|2x+1|\geq 3$

c) $3|2x+7|\leq 9$

d) $3|9-x|\leq 6$

e) $|9-x|>6$

f) $|2x-1|<11$

***Mise au point (partie 3) p. 31 # 22, 24 à 28

Mathématiques 30331-C

3.6 Factoriser et développer des polynômes

- *Développement d'expressions algébriques*

Exercices :

1. a) $2x^2 - x - 3 = 0$ b) $2x^2 - 5x = 3$ c) $0,5x^2 - x = 3$

   d) $40x^2 = 10 - 9x$ e) $0,02x^2 - 0,03x + 7 = 0$ f) $1,07x^2 + 3,5x = 0$

2. En une saison, un magasin d'articles de sport vend 90 vestes de ski à 200$ chacune. Chaque fois qu'on réduit le prix de 10$, on vend 5 vestes de plus. Détermine le nombre de vestes qu'on a vendues et le prix auquel on les a vendues si on a généré des revenus de 17 600$.
3. La hauteur d'un triangle mesure 2 unités de plus que la longueur de sa base. L'aire du triangle mesure 10 unités carrées. Trouve la longueur de la base, au centième près.
4. Petra a couru 9 km en une heure. Durant les 4 derniers kilomètres, elle a couru 2km/h moins vite que durant les 5 premiers kilomètres. Quelle était sa vitesse durant les 5 premiers kilomètres ?
5. Un camion qui transporte l'équipement d'un groupe rock va de Calgary à Spokane, soit une distance de 720 km. Pendant le trajet de retour, le camion augmente sa vitesse moyenne de 10 km/h. Si l'aller et le retour a duré 17 heures en tout, quelle était la vitesse moyenne du camion de Calgary à Spokane ?

***Mise au point p. 97 # 9 à 16

Inéquations quadratiques : Résoudre algébriquement

$$3x^2 - x < 4$$
$$3x^2 - x - 4 < 0$$
$$\frac{(3x-4)(3x+3)}{3} < 0$$
$$\frac{(3x-4)3(x+1)}{3} < 0$$
$$(3x-4)(x+1) < 0$$

		-1		4/3	
3x - 4	–	–	–	0	+
x + 1	–	0	+	+	+
( )( )	+	0	–	0	+

Donc $\left]-1, \frac{4}{3}\right[$

Exercice

1. a) $2x^2 - x - 3 \le 0$ b) $2x^2 - 5x > 3$ c) $0,5x^2 - x < 3$

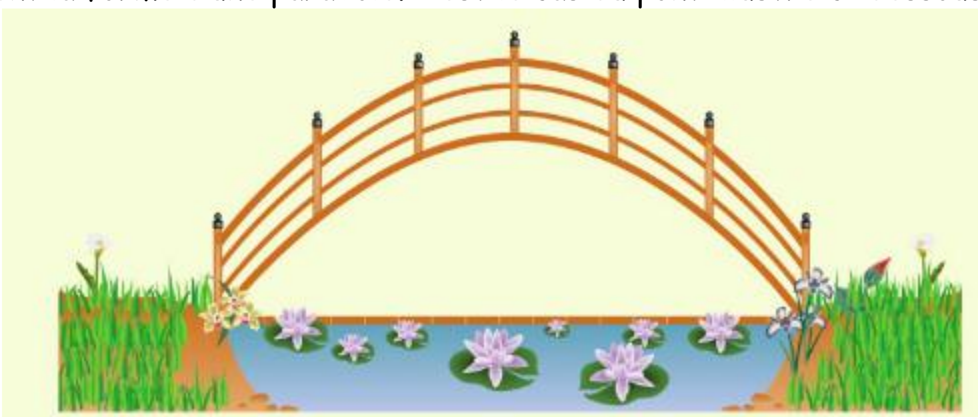
Mathématiques 30331-C

Nous avons déjà résous des systèmes d'équations à deux variables de degré 1. Maintenant, nous allons mélanger les systèmes en ayant des équations du 1er degré, 2e degré et valeur absolue dans le même problème.

Problème p. 228

Pont en réparation

Dans les jardins japonais, les ponts font partie intégrante de l'aménagement. Il arrive parfois que ceux-ci aient la forme d'une parabole. C'est le cas du pont illustré ci-dessous.

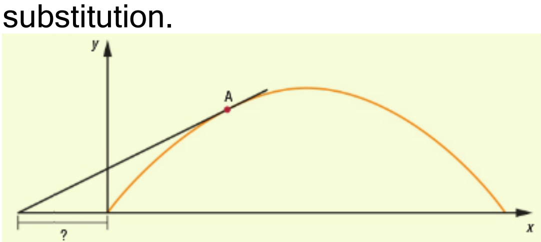


La partie gauche de ce pont est en réparation et les responsables du jardin ont appuyé une planche sur le pont de façon que la pente de celle-ci soit de $\frac{1}{2}$. Dans la représentation ci-dessous, le plancher du pont est modélisé par une parabole dont l'équation est

$y = -\frac{5}{32}x^2 + \frac{5}{4}x$, où x varie de 0 m à 8 m. Le segment qui représente la planche touche la parabole en un seul endroit, doit au point A.

Est-il possible que la planche touche le sol à une distance de 1,6 m du pont?

Il suffit de résoudre le système par substitution.



Non, ce n'est pas possible car la planche toucherait le pont à deux endroits.

***Activité 1 p. 229

***Activité 2 p. 230

$$y = \frac{1}{2}x + b \quad \text{et} \quad (-1,6;0)$$

$$0 = \frac{1}{2}(-1,6) + b$$

$$b = 0,8$$

$$y = -\frac{5}{32}x^2 + \frac{5}{4}x$$

$$y = \frac{1}{2}x + 0,8$$

$$\frac{1}{2}x + 0,8 = -\frac{5}{32}x^2 + \frac{5}{4}x$$

$$0 = -\frac{5}{32}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{8}{10}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{-5}{32}\right)\left(\frac{-8}{10}\right)}}{2\left(\frac{-5}{32}\right)}$$

$$x = \frac{-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}}}{\frac{-5}{16}}$$

$$x = \frac{-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}}{\frac{-5}{16}} = \frac{-\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}}{\frac{-5}{16}}$$

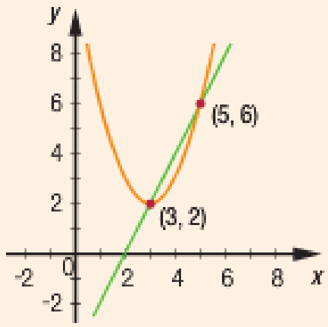
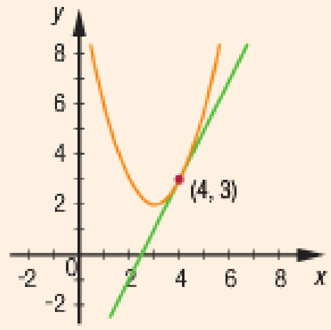
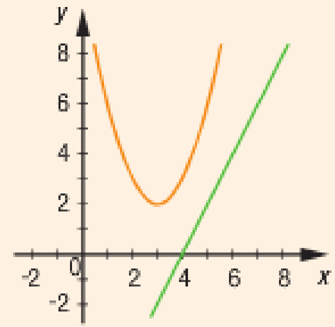
$$x = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{-5}{16}} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$x = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{-5}{16}} = \frac{16}{5} = 3,2$$

Nombre de solutions

La résolution d'un tel système d'équations mène généralement à résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. On peut alors déterminer le nombre de solutions du système d'équations à l'aide du signe du discriminant Δ (la valeur sous la racine dans la formule quadratique) associé à cette équation.

Ex. :

Système d'équations	1) $y = x^2 - 6x + 11$ $y = 2x - 4$	2) $y = x^2 - 6x + 11$ $y = 2x - 5$	3) $y = x^2 - 6x + 11$ $y = 2x - 8$
Représentation graphique			
Équation obtenue et discriminant	$x^2 - 8x + 15 = 0$ $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(15)$ $\Delta = 4 > 0$	$x^2 - 8x + 16 = 0$ $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(16)$ $\Delta = 0$	$x^2 - 8x + 19 = 0$ $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(19)$ $\Delta = -12 < 0$
Solution	Il y a deux solutions, (3, 2) et (5, 6).	Il y a une solution, (4, 3).	Il n'y a aucune solution.

***Mise au point p. 233 #1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 15, 19

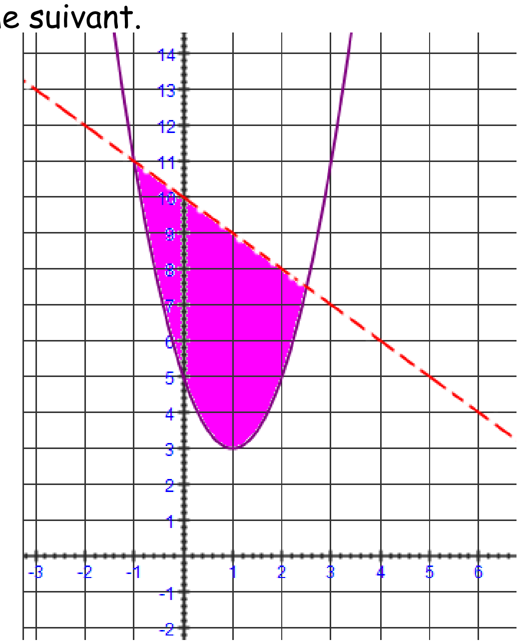
3.5 Modéliser et résoudre des problèmes qui se traduisent par un système d'équations ou d'inéquations

- système d'inéquations semi-linéaires

Comme dans les systèmes d'inéquations à deux variables qu'on a appris, on peut aussi avoir des systèmes d'inéquations semi-linéaires, ce qui veut dire qu'on combine des inéquations linéaires avec des inéquations quadratiques et valeurs absolues.

Exemple : Représente l'ensemble solution du système suivant.

$$y \geq 2(x-1)^2 + 3$$
$$x + y < 10$$



*** Mise au point p. 245 # 2acef, 4, 8
*** Vue d'ensemble p. 254 # 2, 4, 10, 13, 16, 18
***Réactivation p. 267