Mathématiques 30331C

Bloc 2

Sens des nombres et des opérations (+- 8 cours)

1 - Démontrer une compréhension du concept du nombre et l'utiliser pour décrire des quantités du monde réel.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

1.2 Modéliser et résoudre des problèmes financiers liés à des situations de la vie courante

- Intérêts composés (inflation et dépréciation, prêts avec et sans annuités, placements)*trouver la valeur de « n »

2 - Effectuer des opérations avec différentes représentations numériques afin de résoudre des problèmes du monde réel. (~5 cours)

2.1 utiliser les propriétés des logarithmes pour résoudre des problèmes

- *Lois des exposants*
- Propriétés des logarithmes (B>0, B‡1, x≥1), $\log_B 1 = 0$, $\log_B B^x = x$, $\log_B x^y = y$, $\log_B x = \dfrac{\log x}{\log B}$

L'exposant est le numéro qui donne le nombre de fois qu'on doit utiliser la base dans la multiplication.

Donc : $\mathbf{2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8}$ (on multiplie le 2 trois fois par lui-même, qui donne 8)

Rappelons-nous des lois des exposants :

Produit de puissances : $b^x \times b^y = b^{x+y}$

Quotient de puissances : $b^x \div b^y = b^{x-y}$

Puissance d'une puissance : $\left(b^x\right)^y = b^{xy}$

Racine d'une puissance : $\sqrt[y]{b^x} = b^{x/y}$

Puissance d'un produit : $\left(ab\right)^x = a^x b^x$

Exemple : $2^3 \times 2^1 = 2^{3+1} = 2^4$

Exemple : $x^0 = 1$ (n'importe quel nombre à l'exposant 0 est toujours égal à 1)

Mathématiques 30331C

Exercice

1. Ecris ces expressions sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances.

a) $(2\times 3)^3$ b) $\left[(-4)\times 3\right]^2$ c) $\left[(-2)\times(-4)\right]^3$

2. Écris sous la forme de puissances suivantes sous la forme de puissances uniques.

a) $(3^4)^3$ b) $\left[3^0\right]^2$ c) $\left[-(7^2)^5\right]^3$

3. Pourquoi la valeur de $\left[(-3)^3\right]^2$ est-elle positive, tandis que la valeur de $\left[(-3)^3\right]^3$ est négative ?

4. Simplifie les expressions suivantes, puis évalue-les.

a) $(2^3\times 2^1)^2$ b) $(5^4\div 5^2)^2$ c) $(10^2)^4\div(10^3)^2$

5. Simplifie les expressions suivantes, puis évalue-les.

a) $(3^2\times 4^3)^0-(4^4\div 4^2)^2$ b) $(2^3\div 2^2)^3+(7^4\times 7^3)^0$ c) $\left[(-1)^3\right]^4-\left[(-1)^4\div(-1)^3\right]^2$

6. Effectue les opérations et donne la réponse sous forme de puissances de nombre premiers. (donne la réponse avec un exposant positif).

Exemple : $$\frac{32^2\times 6^{-2}\times 10^3}{18^5\times 25^{-2}}=\frac{(2^5)^2\times(2\times 3)^{-2}\times(2\times 5)^3}{(2\times 3^2)^5\times(5^2)^{-2}}=\frac{2^{10}\times 2^{-2}\times 3^{-2}\times 2^3\times 5^3}{2^5\times 3^{10}\times 5^{-4}}$$

$$=2^{10-2+3-5}\times 3^{-2-10}\times 5^{3+4}=2^6\times 3^{-12}\times 5^7=\frac{2^6\times 5^7}{3^{12}}$$

a) $\dfrac{20^2\times 18^3}{6^9\times 5^5}$ b) $\dfrac{30^2\times 18^3}{6^9\times 15^5}$ c) $\dfrac{25^2\times 8^3\times 9}{16^2\times 5^{-2}\times 27}$

7. Résous (il faut placer les nombres à la même base)

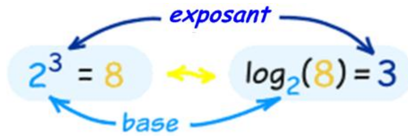
a) $2^x=64^{\frac{3}{4}}$ b) $5^x=3125$ c) $7^{x+3}=49^2$

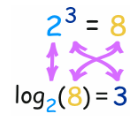
d) $2^{x+3}=\left(\dfrac{1}{8}\right)^4$ e) $27^x=81^4$ f) $125^{2x-1}=625^x$

g) $13^{x^2-4}=1$ h) $9^{2x}=\sqrt{27}$ i) $64^{2x}=16$

Mathématiques 30331C

La réciproque (fonction inverse) de la fonction exponentielle se nomme la fonction logarithmique, elle permet d'isoler l'exposant de la fonction exponentielle.





Le logarithme détermine combien de fois on doit multiplier ce nombre pour obtenir l'autre nombre.

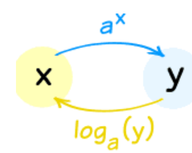
Rempli le tableau suivant :

Forme logarithmique	Forme exponentielle	Valeur de y
$y = \log_2 16$	$2^y = 16 = 2^4$	4
$y = \log_2 64$		
$y = \log_2 \frac{1}{2}$		
$y = \log_{10} 100$		

On n'est pas obligé d'écrire la base 10, donc si un logarithme n'a pas de base, c'est à la base 10.

$\log_{10} x = y$ ou $\log x = y$

Le $\log_y 49 = 2$ se lit le logarithme de 49 à la base y est égale à 2



Ex : Résous. (changer d'une forme à l'autre)

$\log_2 64 = x$

$2^x = 64$

$2^x = 2^6$

$x = 6$

Exercice –

1. Exprime chaque énoncé sous forme logarithmique..

a) $3^2 = 9$ b) $4^5 = 1024$ c) $49^{1/2} = 7$

2. Exprime chaque énoncé sous forme exponentielle.

a) $\log_5 5 = 1$ b) $\log_3 729 = 6$ c) $\log_{10} 1 = 0$

3. Évalue

a) $\log_2 32 = x$ b) $\log 1000 = x$ c) $\log_9 1 = x$

4. Quelle est la valeur de x dans chaque cas?

a) $\log_3 81 = x$ b) $\log_x 64 = 3$ c) $\log_{1/2} 8 = x$ d) $\log_x 16 = 4/3$

Mathématiques 30331C

Les exposants et les logarithmes fonctionnent bien ensemble car ils sont l'inverse l'un de l'autre aussi longtemps que la base est la même.

Puisque $a^{\log_a(x)} = x$ et $\log_a a^x = x$

◊ Lois des logarithmes

Logarithme d'un produit	Logarithme d'un quotient
$a^{\log_a(x)} = x$ $\log_a(m \times n) = \log_a(a^{\log_a m} \times a^{\log_a n})$ $= \log_a(a^{\log_a m + \log_a n})$ $\quad x^m x^n = x^{m+n}$ $= \log_a m + \log_a n$ $\quad \log_a(a^x) = x$	$a^{\log_a(x)} = x$ $\log_a(m \div n) = \log_a(a^{\log_a m} \div a^{\log_a n})$ $= \log_a(a^{\log_a m - \log_a n})$ $\quad x^m/x^n = x^{m-n}$ $= \log_a m - \log_a n$ $\quad \log_a(a^x) = x$
Logarithme d'une puissance	**Changement de base**
$a^{\log_a(x)} = x$ $\log_a(m)^x = \log_a(a^{\log_a m})^x$ $= \log_a(a^{\log_a m \cdot x})$ $\quad (x^m)^n = x^{mn}$ $= x \log_a m$ $\quad \log_a(a^x) = x$	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Ex : a) $\log_5 100 + \log_5 \frac{1}{4}$ b) $\log_2 384 - \log_2 12$ c) $\log_7 49^5$ d) $\log_3 \sqrt[5]{27}$

Ex : Écris chaque expression sous la forme d'un seul logarithme.

a) $\log(a + b) + \log(a - b)$ b) $\log A - 3\log B + 5\log \sqrt[5]{C} =$

Ex : Si $x = \log_4 5$ et $y = \log_4 3$, exprime $\log_4 225$ en fonction de x et de y.

On trouve les facteurs de 225 en termes de 5 et 3.

$\log_4 225$

Ex : Résous : $2^x = 5$

***Mise au point p. 372 #1 à 5, 8 à 10

Mathématiques 30331C

Applications : Exercice

1. Trisha place 200$ dans un compte à du 5% d'intérêts, composé semestriellement pour s'acheter une bicyclette. Elle veut atteindre la somme de 225$. Elle devra donc laisser son argent dans ce compte pour combien d'années?

2. Un capital de 60 000 $ placé au taux annuel de 7,5 % est capitalisé par quinzaine. Le capital disponible est de 70 349,18 $ à la fin du placement. Calculez la durée de placement (on considère 24 quinzaines dans l'année).

3. Un capital de 50 000 $ est placé à intérêts composés à un taux annuel de 4,2 %.

a) Calculer la valeur acquise par ce capital au bout de 5 ans, la capitalisation étant annuelle. Cette valeur sera calculée au centime le plus proche.

b) Pendant combien d'années faut-il placer ce capital pour qu'il ait une valeur acquise de 72406,82$?

4. L'entreprise NORD-IST prévoit d'investir, dans le futur, 600 000 $ de matériel de stockage. Pour cela, elle décide de placer en 2013 de l'argent à intérêts composés au taux annuel de 4 %.

a) Calculer la somme d'argent qui doit être placée (à intérêts composés) si l'entreprise NORD-IST veut réaliser un investissement de 600 000 $ dans 5 ans.

b) En 2013, l'entreprise place 422 000 $. Calculer à partir de quelle année, l'entreprise NORD-IST pourra réaliser cet investissement de 600 000 $.

5. Un prêt de 20000$ à 5% d'intérêt annuellement est remboursé par des paiements de 1000$ après un an, 2000$ la deuxième année et ainsi de suite en augmentant de 1000$ par année jusqu'à un dernier paiement. Utilise le tableau d'amortissement de ce prêt pour répondre aux questions.

Montant	Intérêts	Paiement	Solde
20000		1000	
		2000	
		3000	
…			
			0

a) Déterminer dans combien d'années le prêt sera remboursé en entier.

b) Déterminer le montant du dernier paiement. c) Déterminer le montant total remboursé.

6. On vous donne une partie d'un tableau d'amortissement : Remplis ce tableau.

Montant	Intérêts	Paiement	Solde
	258,39	1500	3456,36
		1500	2146,45
		1500	
	42,05		0

7. A un taux d'intérêt composé de 7,75%, combien faudra-t-il de temps pour qu'un capital :

a) double ? b) triple ?

*** Vue d'ensemble p. 383 # 3abcd, 7, 9, 10, 13