Mathématiques 30331C

BLOC 3

Sens des nombres et des opérations (+- 9 cours)

1 - Démontrer une compréhension du concept du nombre et l'utiliser pour décrire des quantités du monde réel.

1.1 démontrer une compréhension des nombres réels et de ses sous-ensembles, des différentes façons de les représenter et des interrelations dans le but de les utiliser dans divers contextes

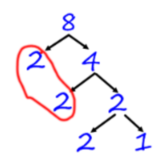
- ◊ - *expressions exponentielles équivalentes (simplification d'expressions de même base)*
- ◊ - simplification d'un radical entier en radicale mixte
- ◊ - racine nième d'un nombre ($\sqrt[n]{x}$)

Rappelons que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\quad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

Exemples :

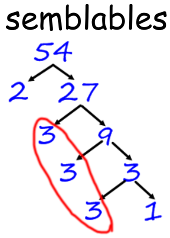
1) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$ 2) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ 3) $\frac{4\sqrt{34}}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{2}\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{\frac{34}{2}} = 2\sqrt{17}$

Simplification des radicaux



Considérons le nombre $\sqrt{8}$. Le nombre 8 peut être décomposé en un produit de 2 nombres naturels dont un de ces nombres est un carré parfait : 4 x 2.
$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, on dit que l'on a simplifié le radical ou écrit comme radical mixte.

L'indice d'un radical peut être un autre nombre que 2, exemple $\sqrt[3]{54}$, pour le simplifier, on doit trouver un facteur de 54 qui a une racine cubique. Une façon facile de le faire est de trouver les facteurs premiers du nombre, ensuite de grouper les facteurs semblables.



$\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$

Exercices : Simplifie les radicaux

a) $2^{\frac{1}{2}}$

b) $8^{\frac{3}{2}}$

c) $\dfrac{15^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

f) $\dfrac{4\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{34\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}$

h) $\sqrt{32}$

i) $\sqrt{125}$

j) $\sqrt{98}$

k) $\sqrt{48}$

l) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$

m) $\sqrt{50}+\sqrt{72}$

n) $\sqrt{50}\times\sqrt{72}$

o) $\sqrt{3}+\sqrt{27}$

p) $2\sqrt{2}+3\sqrt{8}$

q) $5\sqrt{3}-2\sqrt{12}$

r) $2\sqrt{75}\times 3\sqrt{3}$

s) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}}\times\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{63}}\times\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}}$

t) $\dfrac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{32}}$

u) $\sqrt[3]{72}$

Mathématiques 30331C

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES
2.4 modéliser des problèmes à l'aide de matrices

◊ caractéristiques de matrices

- Éléments, rangées, colonnes, dimensions
- Matrice identité
- Matrice nulle

LES MATRICES

Une matrice est un tableau rectangulaire qui contient des informations. On identifie une matrice par une majuscule.
Chaque nombre dans le tableau se nomme un « élément ».
La dimension d'une matrice est donnée par *m par n*, où *m* représente le nombre de rangées et *n* le nombre de colonnes.

- m est le nombre de rangées
- n est le nombre de colonnes

Ex : $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & -9 \\ 12 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

◊ Dans la matrice A, les éléments sont nommés par a_{ij}, « i » représente la ligne et « j » la colonne. Donc, l'élément $a_{22} = 1$. L'élément $b_{32} = 8$.

◊ La dimension de la matrice A est de 2 par 2 et elle est carrée car elle a le même nombre de colonne comme le nombre de rangée.

◊ Alors, la dimension de matrice B est de 4 par 3.

Lorsque la matrice a seulement une colonne, on la nomme « matrice colonne » et lorsqu'elle a juste une rangée, on la nomme « matrice rangée ».

Une « matrice réelle » possède des éléments qui sont tous des nombres réels.

Une « matrice nulle » (ou matrice zéro) possède des éléments qui sont tous nuls. On la note par 0.

Lorsqu'une matrice est carrée, on peut définir sa diagonale principale.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, a_{11}, a_{22} et a_{33} sont les éléments qui composent la diagonale principale.

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si (ssi) elles ont les mêmes dimensions, m sur n, et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout « i et j » compris dans la matrice.

Alors en décomposant, ceci veut dire que $a_{11} = b_{11}$ et que $a_{12} = b_{12}$ et que $a_{22} = b_{22}$ …. Les éléments correspondants sont donc égaux.

Les éléments de a_{ij} et b_{ij} sont des éléments correspondants.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc les matrices A et B sont égales.

Ex : Trouve les éléments a, b, c qui rendraient les deux matrices égales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2c & 7 & 2 \\ a-2 & 5 & 9 & 1 \\ 4 & 6+b & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Pour que les deux matrices soient égales, il faut que $a = 7$, $b = 2$, $c = 3$

Une matrice identité est une matrice carrée dont les valeurs des éléments de la diagonale principale sont tous 1 alors que les tous les autres sont des 0.

Ex : $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice transposée de A, qu'on note A^t, est obtenue en transformant les lignes de A en colonnes de A et les colonnes en lignes.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 10 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

***Exercices 1 p. 9 # 1, 2, 3, 4ac, 7ac, 9, 10, 12, 13, 14

1.3 modéliser des problèmes à l'aide de matrices

◊ opérations sur les matrices

- addition et soustraction
- produit d'une matrice par un scalaire
- produit matriciel

La création de matrices

Pour créer les matrices, il suffit de définir l'ordre que l'on veut placer les données pour pouvoir résoudre des problèmes

Ex : Fernando travaille dans un garage et une de ses nombreuses tâches consiste à tenir l'inventaire de l'entreprise. Afin de contrôler certaines sections de son inventaire, Fernando décide d'organiser les données de façon suivante :

$$\begin{array}{c} \\ \text{Piston} \\ \text{Cylindre} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Toyota} & \text{Ford} & \text{Chevrolet} & \text{Chrysler} & \text{Honda} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) *Combien de pistons le garage a-t-il en inventaire?*

b) *Combien de cylindres de Chrysler le garage a-t-il en inventaire?*

Addition de deux matrices

Pour additionner deux matrices, on additionne leurs éléments correspondants. Pour soustraire deux matrices, on soustrait leurs éléments correspondants.

Note: Possible uniquement si les matrices considérées sont de **même dimension**.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -9 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

On peut additionner les matrices A et B, mais pas A et C, ni B et C car les matrices ne sont pas de même dimension.

$$A + B = \begin{bmatrix} 3-4 & 4+12 \\ -1+4 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 16 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire

Si $A = [a_{ij}]$ est de dimension m x n et r est un nombre réel, alors la multiplication d'un scalaire et d'une matrice **rA** en résulte une matrice d'ordre (de dimension) m x n , $B = [b_{ij}]$ où $b_{ij} = ra_{ij}$.
B est obtenu en multipliant tous les éléments de A par r.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ donc $2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$

Produit matriciel

Si $A = [a_{ij}]$ est une matrice de dimension «m par p» et $B = [b_{ij}]$ est une matrice de dimension «p par n », alors le produit de A et de B est une matrice de dimension « m x n » , $C = [c_{ij}]$ définie comme : $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

Pour multiplier deux matrices, il faut que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de rangées de la deuxième. La matrice finale aura le nombre de rangées de la première et le nombre de colonnes de la deuxième.

X x Y = Z
(p sur q) (q sur r) (p sur r)

ex : $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

2 sur 2 2 sur 4 donc AxB sera 2 sur 4

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 \times -1 + 4 \times 0 & 3 \times 2 + 4 \times 3 & 3 \times 10 + 4 \times -1 & 3 \times 7 + 4 \times 6 \\ -1 \times -1 + 6 \times 0 & -1 \times 2 + 6 \times 3 & -1 \times 10 + 6 \times -1 & -1 \times 7 + 6 \times 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 18 & 26 & 45 \\ 1 & 16 & -16 & 29 \end{bmatrix}$$

Elle est l'élément neutre de la multiplication matriciel i.e. **IA=AI=A**

***Exercices 2 p. 14 # 1, 2, 3
***Exercices 3 p. 26 # 1bdfh, 2bdfi, 3adg, 5

1.3 modéliser des problèmes à l'aide de matrices

◊ opérations sur les matrices

- inverse d'une matrice
- déterminant d'une matrice carrée

Si A et B sont des matrices carrées de même ordre telles que AB= BA = I, alors la matrice B est dite matrice inverse de A et nous noterons B= A^{-1}. Bien sûr, A est la matrice inverse de B et A = B^{-1}.

Soient les matrices $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, détermine si B est la matrice inverse de A.

Pour trouver la matrice inverse de A à partir d'une résolution d'équations, il faut remplacer les éléments de la matrice inverse par des variables. Si A = $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, alors A^{-1} = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Nous savons que le produit matriciel doit donner la matrice identité, A x A^{-1} = I.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4a-3c & 4b-3d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut alors résoudre le système d'équations pour résoudre a, b, c et d.

4a – 3c = 1 4b – 3d = 0

-a + c = 0 -b + d = 1

Avec soit la méthode d'élimination ou de substitution, on peut résoudre ce système.

①	4a – 3c = 1	③	4b – 3d = 0
②x3	-3a + 3c = 0	④x3	-3b + 3d = 3
①+②	a = 1	③+④	b = 3
	4(1) – 3c = 1		4(3) – 3d = 0
	4 – 3c = 1		12 – 3d = 0
	-3c = -3		-3d = -12
	c = 1		d = 4

donc A^{-1} = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Ex : Trouve la matrice inverse de $D=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Exercices 5 p. 41 # 1ace, 6ac

- Inverse d'une matrice par la méthode échelonnée

On place la matrice à gauche et la matrice identité à droite. Il faut réussir à avoir la matrice identité à gauche en effectuant des transformations.
Pour faire les transformations,

i) on peut permuter deux lignes
ii) on peut multiplier/diviser une ligne par un scalaire
iii) on peut soustraire/additionner deux lignes
iv) on doit écrire en ligne de la ligne les changements que subit la ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\langle 1\rangle + \langle 2\rangle \times 4 \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\langle 1\rangle + \langle 2\rangle \times 3 \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\langle 1\rangle \div 4 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \quad \text{donc } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ex : Trouve la matrice inverse de $D = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Exercices 5 p. 43 # 6bde

Déterminant : Méthode de diagonale

Avec une matrice carrée **2x2** nous trouvons le résultat de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \text{Dét } A = ad - bc$$

Ex : $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ Dét $B = (2 \times 5) - (1 \times 4) = 10 - 4 = 6$

Une matrice carrée dont le déterminant égale 0 est dite singulière. Par conséquent, une matrice dont le déterminant est différent de 0 est considérée comme étant non singulière.

Avec une matrice carrée de 3x3, nous trouvons le déterminant de la façon suivante :
La méthode des cofacteurs nous permet de trouver le déterminant de n'importe la matrice carrée et peu importe sa dimension. Pour trouver le déterminant, on aura besoin du mineur et du cofacteur.

Le **mineur** d'un élément a_{ij} d'une matrice carrée A, est le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en éliminant sa i$^{\text{ième}}$ ligne et sa j$^{\text{ième}}$ colonne de A.

Afin de trouver le mineur de a_{32}, on élimine la troisième ligne et la deuxième colonne et on calcule le déterminant des termes restants.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{Dét } A = a_{11} \times \text{dét} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \text{dét} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \text{dét} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \text{Dét } B = a \times \text{dét} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \text{dét} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \text{dét} \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\text{Dét } B = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Ex :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{Dét } B = 3 \times \text{dét} \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \times \text{dét} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-4) \times \text{dét} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Dét } B = 3(0 \times 3 - 6 \times 2) - 4(1 \times 3 - 6 \times -1) + (-4)(1 \times 2 - 0 \times -1)$$

$$\text{Dét } B = -36 - 36 - 8 = -80$$

Mathématiques 30331C

Exercices

1. Trouve le déterminant des matrices suivantes.

a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & -1 & 11 \\ 10 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

2. Opérations de base sur les matrices

a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -5 & -6 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

c) $-5\begin{bmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $-5\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix}$

f) $5\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

g) $-5\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

h) $5\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

i) $-2u\begin{bmatrix} 7u & 3w^2 & 5u & 5 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

k) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

l) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$

m) $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

n) $-4\left(\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\right)$

o) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

p) $-2\begin{bmatrix} -3 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$