Mathématiques 30331-C

Bloc 4

Régularité et algèbre (+- 23 cours)

3 - Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

3.1 Analyser diverses propriétés de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie

◊ *Modèles mathématiques*

◊ *Rôle des paramètres*

◊ *Mode de représentations*

- *Situation, table des valeurs, graphique, équation*

◊ *Propriété d'une fonction*

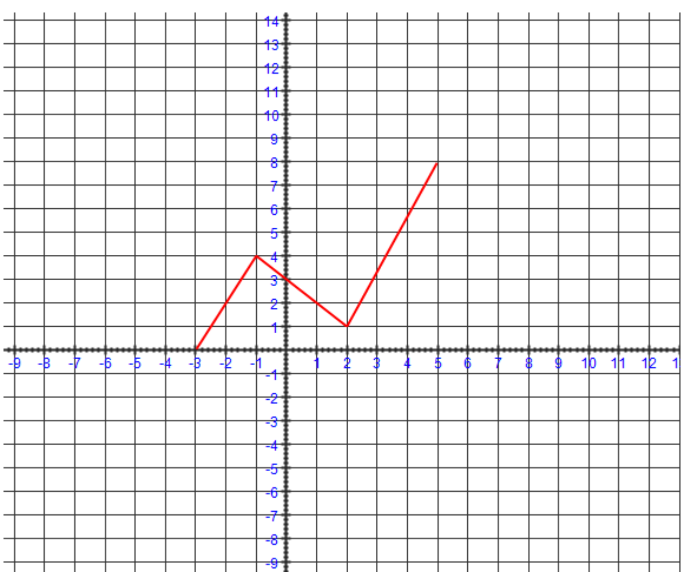
- *Domaine, image, valeur initiale et zéro(s), extrema relatifs et extremum absolu, équation de l'axe de symétrie, variation (croissance, décroissance), coordonnées du sommet, ordonnée et abscisse(s) à l'origine, signe (positif et négatif)*

◊ Asymptote

Rappels :

Rôles des paramètres : $g(x) = \pm af\left(\pm b\left(x - c\right)\right) + d$

1. Quelles sont les transformations sur le graphique de f(x) pour obtenir g(x) ?



g(x) = -3 f(2x - 8)

2. Décris comment les transformations appliquées à f(x), donne aussi ce que la coordonnée (1, 5) devient pour chaque cas.

a) $y = -2f(x-5)$ b) $y = \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}x\right) - 2$ c) $y = -f\left(x\right) + 1$ d) $y = 3f(2x-4) + 1$

3. Donne la valeur de f(2) si f(x) = 2|x – 3| + 1.

4. Résous.

a) $-6 = -2|2x+1|$ b) $x = 3|2-3|-5$ c) $|-3| = x + |2|$ d) $13 = 3|x+7|+7$

5. Le graphique de $f(x) = |x|$ a subi un allongement vertical de facteur 5, suivi d'une translation de quatre unités vers la gauche et d'une translation de six unités vers le bas. Détermine l'équation de la fonction g(x) transformée.

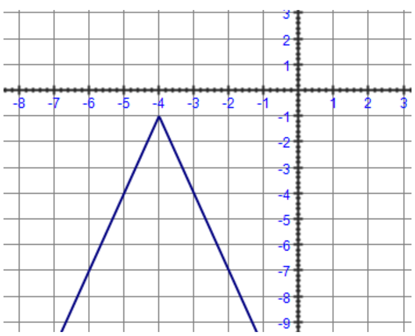
6. Le graphique de $f(x) = |x|$ a subi un allongement vertical par un facteur de 2, suivi d'une translation de trois unités vers la gauche et d'une translation de une unité vers le haut. Écris l'équation de la fonction g(x) transformée.

7. Quelle équation obtient-on lorsque la fonction $y = 3^x$ subit une réflexion par rapport à l'axe des x et une translation de deux unités vers le haut ?

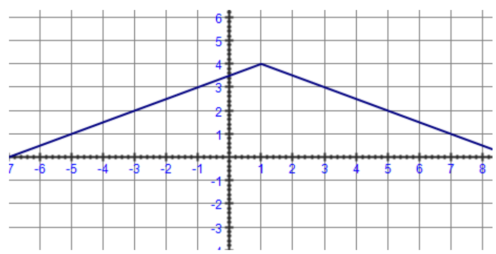
8. Fais subir à $y = x^2$ un rétrécissement horizontal par un facteur de 1/2, suivi d'une translation de trois unités vers la droite et d'une translation de quatre unités vers le bas. Écris l'équation de la fonction ayant subi la transformation.

9. Détermine la règle correspondante :

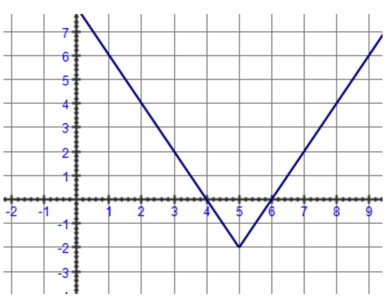
a)



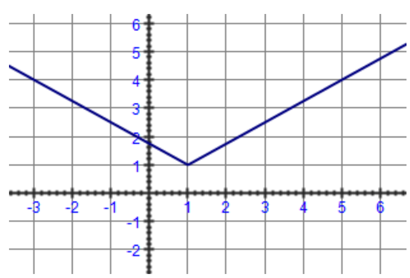
b)



c)



d)



10. Résous.

a) $\left|\frac{4}{7}x + 3\right| + 2 = 10$ b) $\left|\frac{2-x}{3}\right| = 2$ c) $|x-5| = 2x+1$

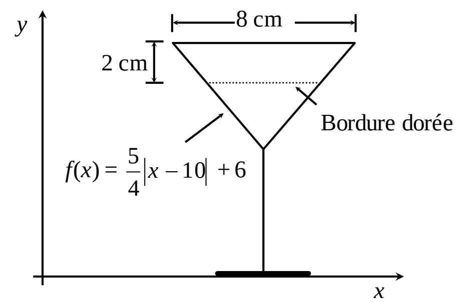
d) $3(x-1) = |3(x+2)|$ e) $|4x+2| \geq 5$ f) $|x-5| \leq 2x+1$

11. On met des balles de golf dans des sacs pour les expédier. Chaque sac doit contenir 820 balles, à plus ou moins 9 balles près. Quelle est l'équation qui représente le mieux le nombre de balles que doit contenir un sac ? Détermine ensuite les valeurs maximale et minimale.

12. Représente graphiquement chaque fonction et détermine :
    a) Le domaine et l'image
    b) La valeur de tous les zéros réels
    c) Les valeurs de x pour lesquelles y > 0.

    i) $f(x) = |x+3| - 2$ ii) $g(x) = -|3x-1| - 1$

13. Un verrier veut plaquer une bordure dorée autour d'un verre sur pied. La bordure dorée sera plaquée à 2 cm du haut du verre. La vue latérale de ce verre est représentée dans le plan cartésien suivant. Ce plan est gradué en centimètres.



Le diamètre maximal du verre est de 8 cm. Quel est le diamètre du verre là où la bordure dorée sera plaquée?

14. Une petite entreprise de construction a modélisé l'évolution de ses profits p (en k$) par la fonction $p = 12{,}5\,|t-4| - 25$, où t représente le temps écoulé) en mois depuis le début de l'année.
    a) Représentez graphiquement cette situation.
    b) Quels étaient les profits de l'entreprise au début de l'année ?
    c) Quelles sont les coordonnées du sommet de la courbe associée à cette fonction t à quoi correspondent-elles dans ce contexte ?
    d) Pendant combien de temps cette entreprise a-t-elle été déficitaire ?

3.2 modéliser des situations à l'aide de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie

◊ Fonction exponentielle : $y = aB^{x-h} + k$

◊ rôle des paramètres des fonctions à l'étude

◊ graphique de la courbe représentative de chaque fonction à l'étude

Réactivation 1 p. 332

Le plasma sanguin est le constituant liquide du sang qui sert à transporter les cellules sanguines et les hormones à travers le corps. Lorsqu'un médicament est administré à un patient ou une patiente, ce médicament est acheminé par le plasma sanguin.

La table de valeurs ci-contre fournit des renseignements sur la concentration d'un médicament dans le plasma sanguin d'un patient.

Concentration d'un médicament dans le plasma sanguin d'un patient selon le temps

Temps (h)	Concentration (ppm)
0	5088
1	2544
2	1272
3	636
4	318

a) Quelle est la concentration initiale de ce médicament?

b) Quelle est la concentration de ce médicament :

1) 5 heures après son administration?

2) 10 heures après son administration?

3) 1 jour après son administration?

c) Déterminez le temps requis pour que la concentration de ce médicament soit de 79,5 ppm.

d) On considère que ce médicament n'a plus effet lorsque sa concentration est 128 fois moins élevée que sa concentration initiale.

1) À quel moment ce médicament n'a-t-il plus d'effet?

2) Quelle est alors sa concentration?

Mathématiques 30331-C

Fonction exponentielle

Une fonction définie par une règle dans laquelle la variable indépendante apparaît en exposant est appelée fonction exponentielle.

$f(x) = 5(3)^{2(x+1)} + 7$
$f(x) = 5(3^2)^{x+1} + 7$
$f(x) = 5(9)^{x+1} + 7$
$f(x) = 5(9)^x(9)^1 + 7$
$f(x) = 45(9)^x + 7$

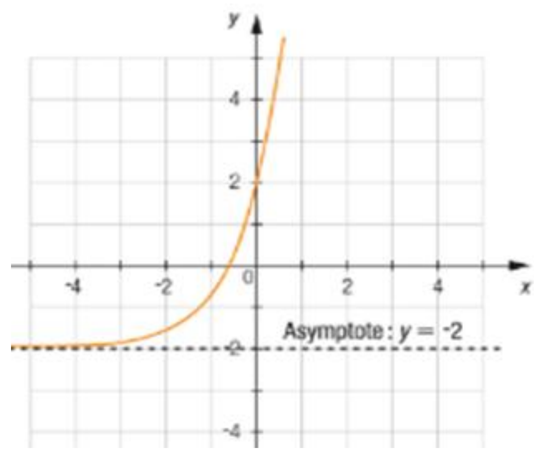
Sa règle : $f(x) = ac^{b(x-h)} + k$; où a et $b \neq 0, c > 0$ mais $c \neq 1$; d'après les lois des exposants, elle peut se simplifier à $\boxed{f(x) = ac^x + k}$.

<table>
<tr><td>Propriétés</td><td>$f(x) = ac^x + k$; où $c \neq 1$</td><td>$f(x) = ac^{b(x-h)} + k$;
où a et $b \neq 0, c > 0$ mais $c \neq 1$</td></tr>
<tr><td>Domaine</td><td colspan="2">R ou selon le contexte</td></tr>
<tr><td>Image</td><td colspan="2">- Si a > 0, $]k, \infty[$
- Si a < 0, $]-\infty, k[$</td></tr>
<tr><td>Zéro de la fonction</td><td colspan="2">Existe si a et k sont de signes contraires.
C'est la valeur de x lorsque f(x) = 0</td></tr>
<tr><td>Croissance</td><td>- Si c > 1 et que a est positif
- Si 0 < c < 1 et que a est négatif</td><td>- Si c > 1 et que a et b sont de même signe.
- Si 0 < c < 1 et que a et b sont de signes contraires</td></tr>
<tr><td>Décroissance</td><td>- Si 0 < c < 1 et que a est positif
- Si c > 1 et que a est négatif</td><td>- Si 0 < c < 1 et que a et b sont de même signe.
- Si c > 1 et que a et b sont de signes contraires.</td></tr>
</table>

Dans une fonction exponentielle, la coordonnée au point x = 0 sera (0, a + k) et une de ses extrémités se rapproche de l'asymptote y = k.

$f(x) = 4(3)^x - 2$

x	y
-3	$-\frac{50}{27}$
-2	$-\frac{14}{9}$
-1	$-\frac{2}{3}$
0	2
1	10
2	34



Exemple : Dans un dessin animé, un personnage nommé Plouc fabrique une boule de neige de 50 g. Du sommet de la montagne, il fait rouler la boule vers le bas. Après avoir roulé 20 m, la masse de la boule est de 100 g. La masse de la boule varie en fonction de la distance parcourue en mètres selon un modèle exponentiel. Quelle est la masse de la boule après 100 m?

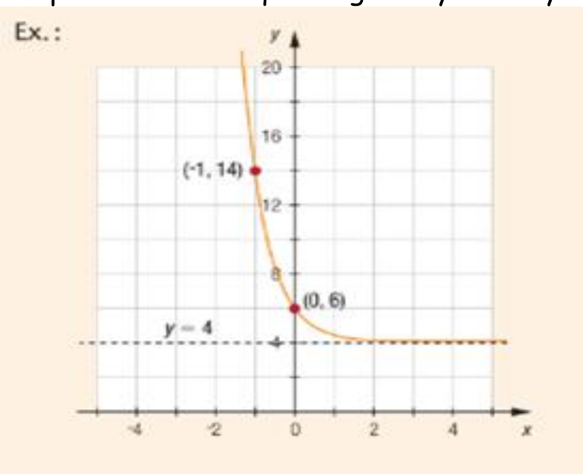
La masse de la boule de neige double chaque fois qu'elle parcourt 20 m.

Comme l'augmentation est exponentielle, on aura une équation de la forme : $f(x) = 50 \times (2)^{\frac{x}{20}}$

Donc, $f(100) = 50 \times (2)^{\frac{100}{20}} = 1600g$

Recherche de la règle $f(x) = ac^x + k$ **.** [Allo prof]

Trouver l'équation de l'asymptote horizontale, l'ordonnée à l'origine de la courbe et les coordonnées d'un autre point. Sachant que k égal au y de l'asymptote et que l'ordonnée à l'origine est a + k.



L'équation de l'asymptote horizontale est $y = 4$, l'ordonnée à l'origine est 6 et la courbe passe par le point (-1, 14).

L'asymptote :

L'ordonnée à l'origine :

k =

a + k =

$y = ac^x + k$ et (-1, 14) donc

******Pages 347 à 352 : 1bcd, 2, 3, 4a-d, 5bcd, 7a, 9, 10, 12, 13, 14 et 15***

3.8 modéliser des situations se traduisant par des équations ou des inéquations afin de résoudre des problèmes

◊ - résolution d'équations et d'inéquations exponentielles

Rappels : équivalences logarithmiques

Changer de la forme exponentielle à la forme logarithmique	$m^n = p \rightarrow \log_m p = n$	$2^x = 5 \rightarrow \log_2 5 = x$
Changement de base	$\log_c m = \dfrac{\log_a m}{\log_a c}$	$\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{3}{2} = 1,5$

Résolution d'une équation exponentielle à une variable

Ramener à la même base		À l'aide du logarithme
$2^{3x} = 64$ $2^{3x} = 2^6$ $3x = 6$ $x = 2$		$3(2)^x - 1 = 14$ $3(2)^x = 15$ $(2)^x = 5$ $\log_2 5 = x$ $x = \dfrac{\log 5}{\log 2} = 2,32$

Exemple :

a) $\dfrac{1}{2}(5)^{x+1} = 25$

b) $2(3)^{x+1} \geq 18$

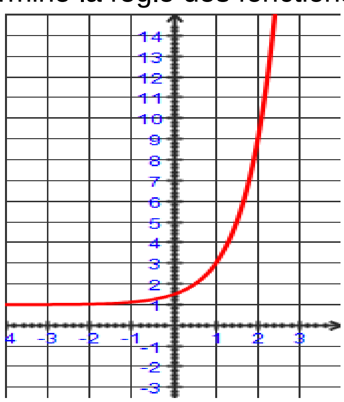
******Pages 373 à 377 : 5acf, 7ace, 10, 12, 14, 15, 17, 21, 22***

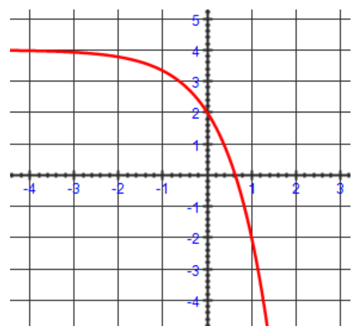
Exercice

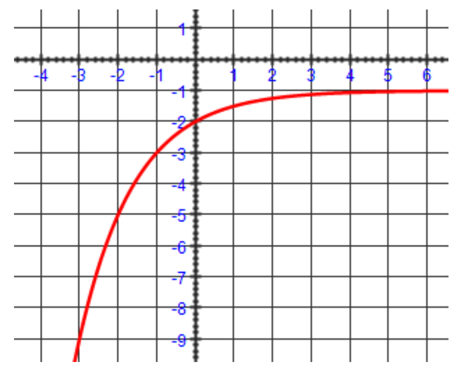
1. Remplissez le tableau ci-dessous pour une règle écrite sous la forme $y = ac^x + k$.

	Valeur du paramètre a	Valeur du paramètre k	Valeur initiale
a) $y_1 = 3(2)^x - 1$			
b) $y_2 = \frac{1}{3}(4)^x + 2$			
c) $y_3 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{3}{4}$			

2. Détermine la règle des fonctions suivantes :

a) 

b) 

c) 

3. Pour chacune des fonctions suivantes, détermine : le domaine, l'image et la valeur initiale.

a) $f(x) = 3{,}2(6)^x + 1$ b) $g(x) = -4(2{,}1)^x + 9$ c) $h(x) = 7(0{,}5)^x - 5$

4. Pour chacune des règles des fonctions suivantes, déterminez une règle équivalente exprimée à l'aide d'une base égale à 2.

a) $f(x) = 6(8)^{x+5} - 9$ b) $g(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{6(x-4)} + 5$

5. Une dame décide d'ensemencer une partie de son jardin de graines de haricots de la façon suivante : elle creuse un premier trou à 10 cm de la bordure de son jardin et y plante 2 graines. Elle creuse ensuite un second trou 15 cm plus loin et y plante 4 graines. Elle double ainsi la quantité de graines qu'elle plante dans chacun des trous, tous les 15 cm.
Si la masse d'une graine de haricot est de 0,22 g et que la dame dispose d'un sac de 1 kg, réussira-t-elle à ensemencer 2 rangs de 1,8 m de longueur chacun, sachant que pour le deuxième rang elle recommencera à planter 2 graines dans le premier trou et ainsi de suite ?

6. Dans le même plan cartésien, tracez le graphique de chacune des paires de fonctions exponentielles.

a) $f(x) = 2(3)^x + 1$
$g(x) = -2(3)^x + 1$

b) $h(x) = 4(2)^x + 3$
$i(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$

7. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminez :
   1) L'équation de l'asymptote
   2) l'image
   3) la variation
   4) le nombre de zéros
   5) la valeur initiale

   a) $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x} + 7$ b) $g(x) = 3,4(5)^{x} - 8$

8. Ecris les règles des fonctions suivantes sous la forme $f(x) = ac^{x} + k$.

   a) $f(x) = 0,25(4)^{3x+2} - 7$ b) $g(x) = 1,8(3)^{5x+1} + 7$

c)

x	y
−1	−11,71
0	−10
1	2
2	86
3	674

Asymptote: $y = -12$

d)

x	y
−1	−4
0	14
1	18,5
2	19,625
3	19,906 25

Asymptote: $y = 20$

9. Écris une fonction exponentielle qui représente la situation. Prédis ensuite la valeur de la fonction après cinq années, au nombre entier le plus près. Une population de 240 animaux augmente à une cadence de 10% par année.

10. Résous

   a) $|3 - x| < 8$ b) $|x + 3| + 3 \leq 9$ c) $|3a + 1| > 3a + 5$

   d) $2(3)^{2x+1} > 12$ e) $2(3)^{2x+1} > 12$ f) $2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \leq \frac{1}{16}$

11. Un récipient contient 20 verres de jus d'orange pur. Durant des journées chaudes, Mario en boit souvent, mais toujours un seul verre à la fois. Cependant, afin que la quantité de jus dure plus longtemps, il remplit d'eau le récipient, chaque fois qu'il prend un verre de jus.

   a) Détermine la fonction exponentielle représentant la quantité de jus d'oranges pur après que Mario en a bus n verres.

   b) Après combien de verres reste-t-il moins de 10 verres de jus pur ?

12. La quantité d'encre d'un ruban de machine à écrire diminue de 0,5% à chaque déroulement. On doit remplacer le ruban lorsqu'il reste moins de 60% d'encre. Quel sera le nombre de déroulement requis avant de changer le ruban ?

13. La population des oiseaux augmente au rythme de 2% chaque année. Dans la région du Niagara, il y avait, en 1990, environ 100000 geais bleus.

    a) Détermine la population qu'il y avait en 1995.

    b) Si la tendance s'est maintenue, combien de geais bleus y a-t-il aujourd'hui dans cette région ?

14. Il y a 20 fois plus d'écureuils rouges que de gris dans le parc Algonquin. La population des écureuils gris augmente au rythme annuel de 10%, tandis que celle des écureuils rouges diminue annuellement de 5%. En combien d'années y aura-t-il plus d'écureuils gris que de rouges ?

15. Une balle de tennis contient de l'azote (gaz qui ne décomposera pas le caoutchouc) sous une pression de 200kPa. Cette pression diminue au rythme de 0,1%, chaque fois que la balle est frappée par un joueur. Lorsque la pression atteint 150 kPa, on considère que la balle est trop molle pour le jeu. Alors combien de fois peut-t-on frapper une balle avant de la remplacer ?

16. Un lundi, l'ordinateur de William et ceux de deux de ses amis sont infectés par un virus informatique qui se propage par les boites de courriels. Chaque jour qui suit, un ordinateur infecté en contamine huit autres.

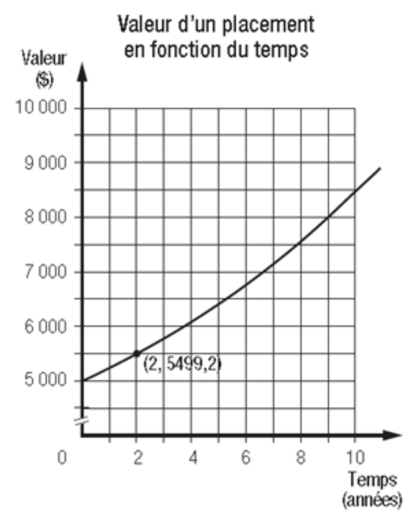
    a) Combien de nouveaux ordinateurs sont infectés au cours du lundi de la semaine suivante ?

    b) Après combien de journée y aura-t-il plus de 12288 ordinateurs infectés ?

17. Depuis quelques années, la ville de Dubaï, dans les Émirats arabes unis, connait une croissance démographique exponentielle de l'ordre de 16% par année. En 2008, on estimait sa population à 1500000 habitants.

    a) Quelle règle nous permet de calculer la population de Dubaï à partir de 2008 ?

    b) A partir de quelle année la population sera-t-elle au-dessus de 1700000 ?



18. Rebecca a représenté dans le graphique ci-dessous la progression de la valeur d'un de ses placements au cours des dernières années.

    a) Quelle somme Rebecca a-t-elle placée initialement ?

    b) Donne la règle de cette fonction.

    c) Après combien d'année le placement sera-t-il plus de 9500$?

19. Une culture bactérienne compte au départ 5000 bactéries. Après six heures, on estime qu'elle en contient 80000. Combien de temps faut-il à cette bactérie pour doubler sa population ?

20. Environ combien de temps faudra-t-il pour qu'un placement de 8000$ augmente jusqu'à 12000$ s'il investit à 9% d'intérêt par année, composée mensuellement ?

21. La demi-vie du carbone 14 est d'environ 5730 ans. Trouve l'âge d'un échantillon dont 18% du nucléide radioactif d'origine ont été réduits.

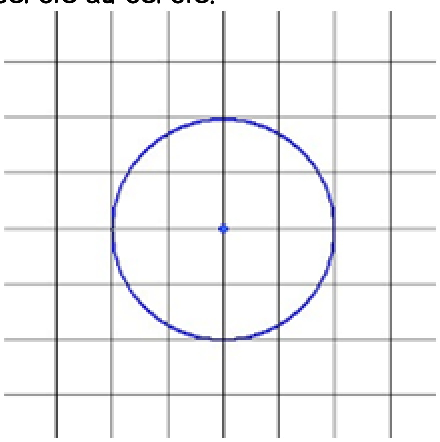
Mathématiques 30331-C

3.4 modéliser des situations à l'aide de la géométrie analytique et les utiliser pour résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie

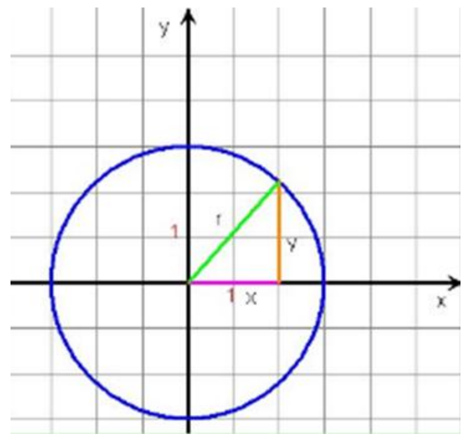
◊ - cercle dans un plan cartésien (équation d'un cercle de la forme $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ et $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

◊ - intersection d'un cercle et d'une droite

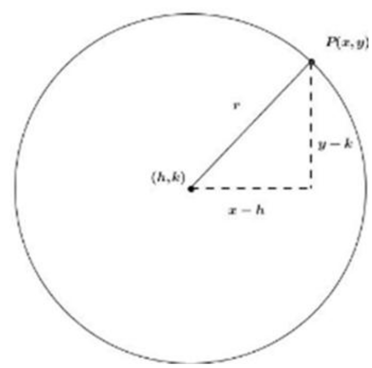
Un cercle est un lieu géométrique constitué d'un ensemble de points situés à égale distance d'un point appelé centre.
Le rayon d'un cercle est un segment reliant le centre du cercle au cercle.



Lorsque le cercle est centré à l'origine, l'équation du cercle est $x^2 + y^2 = r^2$; où x et y sont les coordonnées situées sur le cercle, et r le rayon du cercle.



Lorsque le cercle est centré en un autre point que l'origine, il effectue un déplacement horizontal et vertical. Ce déplacement est représenté par le point (h, k) qui devient le centre du cercle.
L'équation du cercle sous la forme canonique devient : $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.



Exemple :

1) Déterminer l'équation d'un cercle de rayon 4 centré à l'origine.

2) Déterminer l'équation d'un cercle de rayon 2 centré au point (-1, 2).

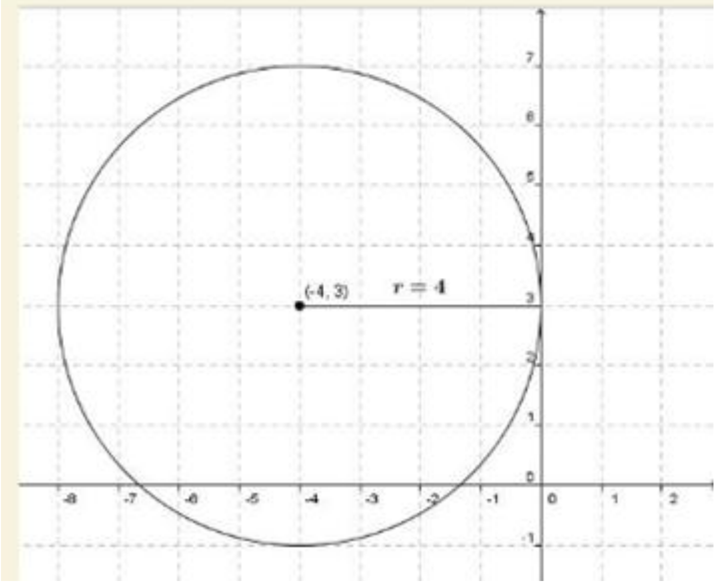
*** Mise au point p. 500 # 1, 2, 6, 8a, 10, 13, Tracer un cercle à l'aide de son équation.

1. Identifier la valeur des paramètres h et k.
2. Tracer un point qui a les coordonnées (h, k). Ceci est le centre du cercle.
3. Identifier r dans l'équation.
4. Avec un compas, tracer à partir du centre un cercle dont le rayon est égal à r.

Soit l'équation $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 16$

1. Les coordonnées du centre (h,k) du cercle est (-4,3).

2. Le rayon est de 4 ($r=\sqrt{16}$).



La forme générale de la règle du cercle est $x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0$ et sa forma canonique est $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Ramener l'équation de la forme générale à sa forme canonique : Complétion du carré :

Exemple : Détermine le centre et le rayon du cercle suivant :

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = 0$$

Exercice :

1. Détermine le centre et le rayon du cercle :

   a) $x^2 + 6x + y^2 - 14y = 23$

   b) $x^2 - 14x + y^2 + 22y + 26 = 0$

   c) $x^2 - \frac{4}{5}x + y^2 - 4y + \frac{29}{25} = 0$

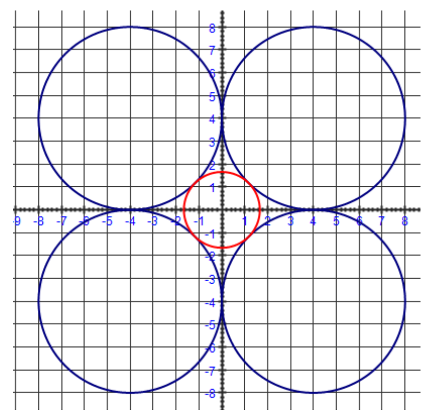
   d) $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 4 = 0$

2. Quelle est l'équation du cercle ayant comme centre (2, -3) et qui est tangent à l'axe des x.
3. Détermine l'équation du cercle qui est concentrique au cercle $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ et qui est tangent à 3x – 4y + 5 = 0.
4. Détermine les points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ avec :

   a) x + 7y – 20 = 0 b) 3x +4y – 27 = 0 c) x + y – 10 = 0

5. Quels sont les points d'intersection des deux cercles définis par $\begin{array}{l}(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4\end{array}$

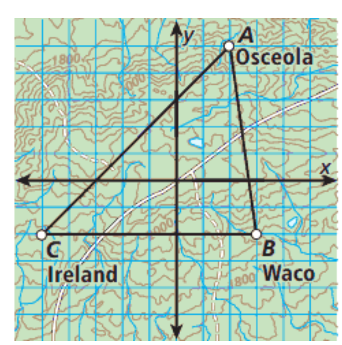
6. Soit le cercle $x^2 + y^2 = 25$. Après une translation, son centre se trouve au point (-3, 4). Suppose que (m, n) est un point sur le cercle original. En fonction de m et n, quelles sont les coordonnées du point correspondant sur l'image par translation ?



7. Dans chacun des quadrants d'un plan cartésien, on a tracé un cercle de rayon 4 qui touche aux deux axes, comme dans la figure. On a également tracé un petit cercle dont le centre est à l'origine et qui touche chacun des autres cercles. Quelle est l'équation du petit cercle ?

8. Les points (1, 0) et (-1, -2) se trouvent sur un cercle. Le centre de ce cercle se trouve sur la droite définie par l'équation y = -2x. Quelle est l'équation du cercle ?

9. Thomas pilote sont avion radioguidé à 30 m au-dessus du sol. Il suit une trajectoire circulaire correspondant à l'équation $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 36$. Emiko fait voler son avion à la même hauteur. Elle suit une trajectoire circulaire représentée par l'équation $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Les trajectoires des deux avions vont--elles se croiser ? Si oui, en combien de points ?



10. Des météorologistes planifient un endroit pour une nouvelle station météo pour couvrir Osceola, Waco et Ireland au Texas. Pour optimiser la couverture radar, la station doit être équidistant des trois villes qui sont situées aux points A(2, 5), B(3, -2) et C(-5, -2).

    a) Quelles sont les coordonnées où la station doit être construite ?

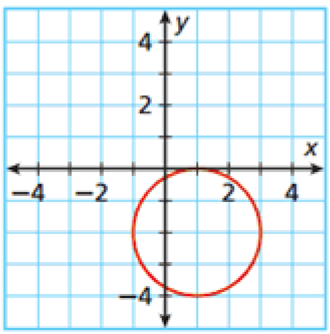
    b) Si chaque unité du plan représente 8,5 miles, quel est le diamètre de la région couverte par le radar ?

11. Une tour pour une antenne radio est perpendiculaire au sol mais elle est attachée par trois fils de même longueur. Les fils touchent le sol à trois points sur un cercle dont le centre est à la base de la tour. Chaque fil touche le sol au point A(2, 6), B(-2. -2) et C(-5, 7).
    a) Quelles sont les coordonnées à la base de la tour ?
    b) Si chaque unité représente un pied, quel est le diamètre du cercle ?

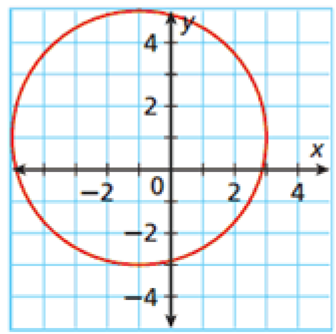
12. En Afrique, le long de la rivière Gambia, on retrouve des groupes de roches placées en cercle qui date de plus de 1000 ans. Dans un de ces cercles, situé à Ker Batch, trois des roches sont placées aux coordonnées A(3, 1), B(4, -2) et C(-6, -2).
    a) Quelles sont les coordonnées d centre de ce cercle ?.
    b) Si chaque unité représente 1 pied, quel est le diamètre de cercle de roches ?

13. Détermine l'équation de chaque cercle.

a)



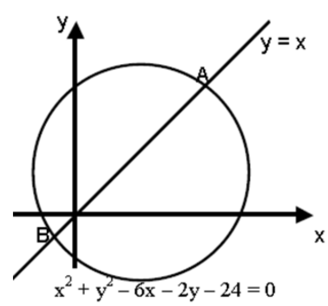
b)



14. Les lignes x = -2, y = -5 et y = 7 sont tangentes à un cercle. Trouve l'équation du cercle.

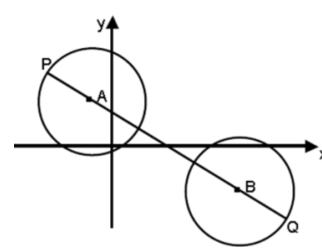
15. Le cercle montre le centre (24, 7) et passes par l'origine. Quelle est l'équation du cercle ?

16. La ligne y = x coupe le cercle $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 24 = 0$ aux points A et B.
    a) Détermine les coordonnées de A et B.
    b) Détermine l'équation du cercle dont AB est son diamètre.

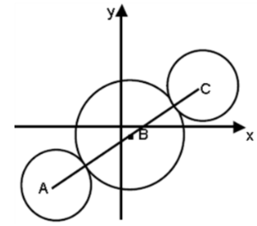


17. Démontre que la ligne y = -3x – 10 est tangente au cercle $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0$ et détermine le point de contact.

18. Dans cette figure, le cercle, de centre A a comme équation $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Le cercle de centre B a comme équation $x^2 + y^2 - 22x + 10y + 121 = 0$. La ligne PQ passe par AB. Calcule la longueur de PQ.



19. Dans la figure, les centres A, B et C sont colinéaires. Les équations des cercles externes sont



$$(x+12)^2+(y+15)^2=25 \quad et \quad (x-24)^2+(y-12)^2=100.$$

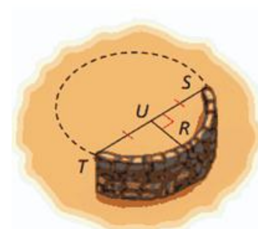
Détermine l'équation du cercle central.

20. En 2004, le plus gros carrousel au monde était à « House on the Rock », à Spring Green, Wisconsin. Suppose que le centre du carrousel est à l'origine et que un des animaux sur la circonférence est à (24, 32). Le carrousel suit un patron circulaire, quel est l'équation de ce cercle ?

21. Un séismographe mesure le tremblement de la terre lors d'un séisme. Pour trouver le centre du séisme, les scientistes prennent la lecture à trois endroits différents. Ils tracent un cercle autour de chaque point, le rayon des cercles est la distance que le séisme est du séismographe de cet endroit. L'intersection des trois cercles est le centre. Trouve le centre du séisme de New Madrid.

Séismographe	Endroit	Distance du séisme
A	(-200, 200)	300 miles
B	(400, -100)	600 miles
C	(100, -500)	500 miles

22. Un archéologue trouve un morceau d'un mur circulaire d'un mur de pierre comme l'arc ST dans la figure, ST = 12,2 m et UR = 3,9 m. Quel est le diamètre du mur circulaire original ?



23. Détermine l'équation du cercle, sous sa forme générale,
   a) De centre A(-2, -3) et de rayon 3.
   b) Qui passe par (1, 1) et a comme centre (4, 5).
   c) Une station de télévision dessert les résidents de trois villes situées à J(5, 2), K(-7, 2) et L(-5, -8). La station veut construire une nouvelle installation de radiodiffusion qui sera équidistante des trois villes. Quelles sont les coordonnées de l'endroit où les installations devraient être construites ?

3.7 modéliser des situations pouvant se traduire par des régularités afin de résoudre des problèmes

◊ suites et séries géométriques

Les régularités permettent de résoudre de nombreux problèmes.

Une suite est une liste ordonnée d'objets. Ses éléments, appelés « termes », respectent une régularité ou une règle qui permet de trouver le terme suivant.

Une suite géométrique est une suite de termes dont un terme est le produit du terme précédent par un facteur fixe que l'on nomme la raison géométrique. On peut déterminer le terme par la règle : $t_n = ar^{n-1}$, où a est le premier terme et r est la raison géométrique, soit le 2^e terme divisé par le 1er terme.

Exemple 1 : Utilisons la suite géométrique 5, 10, 20, 40, 80…

a) Écris la règle de cette suite.

$a = 5$
$r = 2$
$n = n$

$t_n = ar^{n-1}$
$t_n = 5(2)^{n-1}$

b) Détermine la valeur de t_8.

Exemple 2 : Après chaque lavage, un blue-jean perd 1% de sa teinture. Quel pourcentage de la teinture originale restera-t-il après 10 lavages?

Exemple 3 : Les projections démographiques constituent un élément important de la planification gouvernementale. En 1990, la population du Canada était de 26,6 millions de personnes. En 2025, on prévoit qu'elle s'élèvera à 38,4 millions de personnes. Si cette projection était basée sur une suite géométrique, quel serait le taux de croissance annuel?

$a = 26,6\text{millions}$
$r = ?$
$n = 2025 - 1990 + 1 = 36$
$t_{36} = 38,4\text{millions}$

$t_n = ar^{n-1}$
$t_{36} = 26,6(r)^{36-1} = 38,4$
$r^{35} = \frac{38,4}{26,6}$
$(r^{35})^{1/35} = (1,443609)^{1/35}$
$r = 1,010105$

Le taux de croissance annuel est de 1,01%

Exemple 4 : Deux ans après l'achat, la valeur de revente d'une voiture est de 10 000\$. Trois ans plus tard, cette valeur de revente est de 5000\$. Si la dépréciation annuelle de la voiture forme une suite géométrique, quel était le prix original de la voiture?

$t_3 = 10000$
$t_6 = 5000$
$a = ?$

$$t_n = ar^{n-1}$$
$$t_3 = ar^2 = 10000$$
$$t_6 = ar^5 = 5000$$
$$\frac{t_6}{t_3} = \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{5000}{10000}$$
$$r^3 = 0,5$$
$$r = 0,793700526$$

$$t_n = ar^{n-1}$$
$$t_3 = a(0,793700526)^2 = 10000$$
$$0,629960524a = 10000$$
$$a = 15874,01052$$

Si t_1 est le prix original de la voiture. t_2 est un an après, t_3 est la deuxième année.

Le prix original de la voiture était de 15874\$

***(cahier rouge) 6,3 p.300 # 1, 3, 5, 10, 11, 12, 16, 17, 19, 22, 23, 24, 26, 27, 30

- Séries géométriques

Une série géométrique est la somme des termes d'une suite géométrique. On la calcule à l'aide de la formule : $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

Exemple 1 : trouve la somme des 12 premiers termes de la suite $1 + {}^1/_3 + {}^1/_9 + {}^1/_{27} + \ldots$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$a = 1$

$r = \dfrac{1}{3}$

$n = 12$

$$S_{12} = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_{12} = \frac{1-\frac{1}{531441}}{\frac{2}{3}}$$

$$S_{12} = \frac{531441-1}{531441} \times \frac{3}{2} = 1,499997$$

Exemple 2 : Utilisons la somme d'une suite géométrique

Le plus haut totem jamais sculpté dans une bille de bois mesure 38,28 m de haut et se trouve à Beacon Hill Park, à Victoria, en Colombie-Britannique. Si on laisse tomber une balle de lacrosse du haut de ce totem et qu'elle rebondit à 60% de sa hauteur initiale, trouve la distance totale parcourue par la balle au moment où elle touche le sol pour la dixième fois.

$38,28 + 2\times 38,28(60\%) + 2\times 38,28(60\%)^2 + \ldots$ donc la suite est $76,56(0,6)$, $76,56(0,6)^2$, $\ldots 76,56(0,6)^9$

$$S_9 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{(76,56(0,6))(1-0,60^9)}{1-0,60} = 113,68$$

on doit aussi additionner la hauteur du départ qui est 38,28 donc la distance totale est 151,96m.

***Exercices 6.5 p.309 #1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 22a, 23, 24, 27, 28

***Exercices de révisions : p.324 # 1, 3, 5, 7, 9, 10, 14, 18, 23, 29, 31, 33, 35, 37, 41, 42, 43, 44, 45

Page 329 # 42, 44, 46, 47