Mathématiques 30331C

Bloc 4

Sens des nombres et des opérations (+- 5 cours)

2 - Effectuer des opérations avec différentes représentations numériques afin de résoudre des problèmes du monde réel.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

2.4 résoudre des problèmes à l'aide de matrice

◊ - *opérations sur les matrices*
- *addition et soustraction,*
- *produit d'une matrice par un scalaire,*
- *produit matriciel*

◊ matrice augmentée.

◊ résolution de systèmes de m équations à n inconnues où m = n

Rappel :

MATRICE :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 12 & -7 \\ 9 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$.

1. Quelles sont les dimensions de la matrice A ?
2. Combien d'éléments y a-t-il dans la matrice A ?
3. Quel est l'élément a_{32} ?
4. Si $a_{ij} = 9$, quelles sont les valeurs de i et de j ?
5. Est-ce que la matrice A est carrée ?
6. Comment s'appelle la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$? Comment note-t-on cette matrice ?

7. Comment appelle-t-on la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ par rapport à la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$?

9. Si $\begin{bmatrix} 2 & x+y \\ 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & x-y & 1 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix}$, quelles sont les valeurs de x et de y ?

10. Utilise les matrices suivantes pour évaluer.

$X = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad Z = \begin{matrix} 9 & -2 & 4 \end{matrix}$ $\quad W = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

a) 2Y + 3W b) YX c) XZ d) Y^2

Mathématiques 30331C

◊ Matrice augmentée

On se rappelle de trois méthodes déjà apprises pour résoudre des systèmes d'équations, soient graphiquement, par substitution et par élimination. En voilà une qui s'ajoute, soit par la méthode de la matrice augmentée.

On appelle **matrice augmentée** la matrice que nous noterons (A | b) et qui est constituée des coefficients du système et ses constantes :

Exemple : Résous
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 20 \\ 2x - 3y &= 14 \end{aligned}$$

Il faut placer les variables dans le même ordre, comme exemple, les termes contenant des x en premier et les y ensuite avec les constantes de l'autre côté du signe =. Placer ces coéficients dans la matrice.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 20 \\ 2 & -3 & 14 \end{array}\right]$$

Cette méthode consiste à transformer ce système à l'aide des opérations élémentaires comme lorsqu'on trouvait la matrice inverse.

L'ordre à suivre pour résoudre une 2 x 2 est $\begin{bmatrix} 4^e & 3^e \\ 1^{er} & 2^e \end{bmatrix}$

Pour faire les transformations, on fonctionne comme avec la méthode d'élimination, on peut permuter deux lignes, on peut multiplier/diviser une ligne par un scalaire ou on peut soustraire/additionner deux lignes. On doit écrire en ligne de la ligne les changements que subit la ligne

Élimination	Matrice augmentée
$\boxed{1}$ $3x - 4y = 20$ $\boxed{2}$ $2x - 3y = 14$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\left[\begin{array}{cc\|c} 3 & -4 & 20 \\ 2 & -3 & 14 \end{array}\right]$
$\boxed{1} \times 2$ $6x - 8y = 40$ $\boxed{2} \times 3$ $6x - 9y = 42$	$\boxed{2} \times 3 - \boxed{1} \times 2$ $\left[\begin{array}{cc\|c} 3 & -4 & 20 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$
$\boxed{1} - \boxed{2}$ $y = -2$	$\boxed{2} \div -1$ $\left[\begin{array}{cc\|c} 3 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$
$\boxed{1}$ $6x - 8(-2) = 40$ $6x = 40 - 16$	$\boxed{1} + \boxed{2} \times 4$ $\left[\begin{array}{cc\|c} 3 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$
$\boxed{1}$ $6x = 24$ $x = 4$	$\boxed{1} \div 2$ $\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$
Solution $(4, -2)$	Solution $(4, -2)$

Mathématiques 30331C

Si on doit résoudre un système à trois équations et trois inconnus, l'ordre est :

$$\begin{bmatrix} 9^e & 8^e & 7^e \\ 1^{er} & 6^e & 5^e \\ 2^e & 3^e & 4^e \end{bmatrix}$$

Exemple : Résous le système suivant :

$$2x - y + 3z = 0$$
$$x + y - 2z = 1$$
$$3x + 2y + 4z = -13$$

On le représente sous forme de matrice augmentée : $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -13 \end{array}\right]$

.

1 $\quad \boxed{1} - \boxed{2} \times 2 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -13 \end{array}\right]$

2 $\quad \boxed{1} \times 3 - \boxed{3} \times 2 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & 1 & 26 \end{array}\right]$

3 $\quad \boxed{2} \times 7 - \boxed{3} \times 3 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 46 & -92 \end{array}\right]$

4 $\quad \boxed{3} \div 46 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

5 $\quad \boxed{2} - \boxed{3} \times 7 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

6 $\quad \boxed{2} \div -3 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

7 $\quad \boxed{1} - \boxed{3} \times 3 \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

8 $\quad \boxed{1} - \boxed{2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

9 $\quad \boxed{1} \div 2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

donc x = 1, y = -4 et z = -2

Exercices

1. a) $\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 3x - y &= 11 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 5x + 6y &= 70 \\ 3x - 12y &= -270 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + 3y + z &= 3 \\ x + 5y + 5z &= 1 \\ 2x + 6y + 3z &= 8 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x + 6y + 6z &= 3 \\ x + 3y + 10z &= -10 \\ x + 2y + 5z &= -11 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x - 10y + 3z &= -20 \\ x - 3y + 7z &= 0 \\ x - 5y + z &= -10 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x + z &= 12 \\ x - y &= 16 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$

2. Dans une école, on retrouve 675 élèves de la dixième à la douzième année. Il y a 50 élèves de plus en dixième qu'en onzième et 25 élèves de plus en douzième qu'en onzième. Combien d'élèves retrouve-t-on dans chaque niveau ? Réponds à cette question en créant une matrice pour un système de trois équations à trois inconnus et en appliquant la méthode de la matrice augmentée.

Méthode Règle de Cramer

Dans la Règle de Cramer, on trouve la valeur de la variable en calculant le rapport du déterminant obtenu par le remplacement de la colonne des coefficients de la variable par la colonne des résultats, divisé par la matrice initiale. x = $\frac{dx}{\det A}$

Ex : 3x + y = 7
2x – 5y = -1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad et \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}} = \frac{(7)(-5)-(1)(-1)}{(3)(-5)-(1)(2)} = \frac{-35+1}{-15-2} = \frac{-34}{-17} = 2$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}} = \frac{(3)(-1)-(7)(2)}{(3)(-5)-(1)(2)} = \frac{-3-14}{-15-2} = \frac{-17}{-17} = 1$$

Donc x = 2 et y = 1

Avec une matrice carrée de 3x3, nous trouvons le déterminant de la façon suivante :
La méthode des cofacteurs nous permet de trouver le déterminant de n'importe quelle matrice carrée peut importe sa dimension. Pour trouver le déterminant, on aura besoin du mineur et du cofacteur.
Le **mineur** d'un élément a_{ij} d'une matrice carrée A, est le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en éliminant sa i ième ligne et sa j ième colonne de A.
Afin de trouver le mineur de a_{32}, on élimine la troisième ligne et la deuxième colonne et on calcule le déterminant des termes restants.

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Dét A = $a_{11} \times dét\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \times dét\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \times dét\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$DétA = a \times dét\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \times dét\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \times dét\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$DétA = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg$$

Ex :

B = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Dét B = $3 \times dét\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 4 \times dét\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + (-4) \times dét\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Dét B = $3(0 \times 3 - 6 \times 2) - 4(1 \times 3 - 6 \times -1) + (-4)(1 \times 2 - 0 \times -1)$

Dét B = -36 – 36 – 8 = -80

Ex : x + 4y - z = 4
x + 3y + z = 8
2x + 6y + z = 13

Soit A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ et C = $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$