# Mathématiques 30411-B

Bloc 2 – Partie 2

1 - Démontrer une compréhension du concept du nombre et l'utiliser pour décrire des quantités du monde réel.
1.3 Modéliser des problèmes à l'aide des matrices.

2 - Effectuer des opérations avec différentes représentations numériques afin de résoudre des problèmes du monde réel.
2.4 Résoudre des problèmes pouvant se modéliser à l'aide de matrices.
- ❖ *Caractéristiques de matrices*
- ❖ *Opérations sur les matrices*
- ❖ *Inverse d'une matrice*
- Déterminant d'une matrice carrée
- Résolution de systèmes de m équations et n inconnues où m = n

**Rappel**
Une matrice est un tableau rectangulaire qui contient des informations. On identifie une matrice par une majuscule.
Chaque nombre dans le tableau se nomme un « élément ».
La dimension d'une matrice est donnée par *m par n*, où *m* représente le nombre de rangées et *n* le nombre de colonnes.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & -9 \\ 12 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

- ◊ Dans la matrice A, les éléments sont nommés par $a_{ij}$, « i » représente la ligne et « j » la colonne. Donc, l'élément $a_{22} = 1$. L'élément $b_{32} = 8$.
- ◊ La dimension de la matrice A est de 2 par 2 et elle est carrée car elle a le même nombre de colonne comme le nombre de rangée.
- ◊ Alors, la dimension de matrice B est de 4 par 3.

Lorsqu'une matrice est carrée, on peut définir sa diagonale principale.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $a_{11}$, $a_{22}$ et $a_{33}$ sont les éléments qui composent la diagonale principale.

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles ont les mêmes dimensions, m sur n, et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout « i et j » compris dans la matrice.

Alors en décomposant, ceci veut dire que $a_{11} = b_{11}$ et que $a_{12} = b_{12}$ et que $a_{22} = b_{22}$ …. Les éléments correspondants sont donc égaux.

# Mathématiques 30411-B

Les éléments de $a_{ij}$ et $b_{ij}$ sont des éléments correspondants.

$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Donc les matrices A et B sont égales.

*Ex : Trouve les éléments a, b, c qui rendraient les deux matrices égales.*

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 5 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2c & 7 & 2 \\ a-2 & 5 & 9 & 1 \\ 4 & 6+b & 3 & 9 \end{bmatrix}$

*Pour que les deux matrices soient égales, il faut que a =7, b = 2, c = 3*

Une matrice identité est une matrice carrée dont les valeurs des éléments de la diagonale principale sont tous des 1 alors que les tous les autres sont des 0.

*Ex :* $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice transposée de A, qu'on note $A^t$, est obtenue en transformant les lignes de A en colonnes de A et les colonnes en lignes.

*Ex :* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 10 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

**Addition de deux matrices**

Pour additionner deux matrices, on additionne leurs éléments correspondants. Pour soustraire deux matrices, on soustrait leurs éléments correspondants.

**Note:** Possible uniquement si les matrices considérées sont de **même dimension**.

*Ex :* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -9 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

*On peut additionner les matrices A et B, mais pas A et C, ni B et C car les matrices ne sont pas de même dimension.*

$$A + B = \begin{bmatrix} 3-4 & 4+12 \\ -1+4 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 16 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

# Mathématiques 30411-B

**Produit d'une matrice par un scalaire**

Si $A = [a_{ij}]$ est de dimension m x n et r est un nombre réel, alors la multiplication d'un scalaire et d'une matrice **rA** en résulte une matrice d'ordre (de dimension) m x n , $B = [b_{ij}]$ où $b_{ij} = ra_{ij}$.
B est obtenu en multipliant tous les éléments de A par r.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ donc $2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$

**Produit matriciel**

Si $A = [a_{ij}]$ est une matrice de dimension «m par p» et $B = [b_{ij}]$ est une matrice de dimension «p par n », alors le produit de A et de B est une matrice de dimension « m x n » , $C = [c_{ij}]$ définie comme : $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

Pour multiplier deux matrices, il faut que le nombre de colonnes de la première soit égal au nombre de rangées de la deuxième. La matrice finale aura le nombre de rangées de la première et le nombre de colonnes de la deuxième.

X x Y = Z
(p sur q) (q sur r) (p sur r)

ex : $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

2 sur 2 2 sur 4 donc AxB sera 2 sur 4

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3\times -1 + 4\times 0 & 3\times 2 + 4\times 3 & 3\times 10 + 4\times -1 & 3\times 7 + 4\times 6 \\ -1\times -1 + 6\times 0 & -1\times 2 + 6\times 3 & -1\times 10 + 6\times -1 & -1\times 7 + 6\times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 18 & 26 & 45 \\ 1 & 16 & -16 & 29 \end{bmatrix}$$

Exercice :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 12 & -7 \\ 9 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

1.. Quelles sont les dimensions de la matrice A ?
2. Combien d'éléments y a-t-il dans la matrice A ?
3. Quel est l'élément $a_{32}$ ?
4. Si $a_{ij} = 9$, quelles sont les valeurs de i et de j ?
5. Est-ce que la matrice A est carrée ?

6. Comment s'appelle la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ? Comment note-t-on cette matrice ?

7. Comment appelle-t-on la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ par rapport à la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ ?

9. Si $\begin{bmatrix} 2 & x+y \\ 3 & -4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & x-y & 1 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix}$, quelles sont les valeurs de x et de y ?

10. Utilise les matrices suivantes pour évaluer.

$X = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $Z = 9 \quad -2 \quad 4$ $W = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$

a) 2Y + 3W b) YX c) XZ d) $Y^2$

# Mathématiques 30411-B

**Déterminant : Méthode de diagonale**

Avec une matrice carrée **2x2** nous trouvons le résultat de la façon suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \text{Dét } A = ad - bc \qquad \text{Ex : } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{Dét } B = (2 \times 5) - (1 \times 4) = 10 - 4 = 6$$

Une matrice carrée dont le déterminant égale 0 est dite singulière. Par conséquent, une matrice dont le déterminant est différent de 0 est considérée comme étant non singulière.

Avec une matrice carrée de 3x3, nous trouvons le déterminant de la façon suivante :
La méthode des cofacteurs nous permet de trouver le déterminant de n'importe la matrice carrée et peu importe sa dimension. Pour trouver le déterminant, on aura besoin du mineur et du cofacteur.

Le **mineur** d'un élément $a_{ij}$ d'une matrice carrée A, est le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en éliminant sa i $^{\text{ième}}$ ligne et sa j $^{\text{ième}}$ colonne de A.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad \text{Dét } A = a \times \text{dét}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \times \text{dét}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \times \text{dét}\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\text{Dét } A = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Ex :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{Dét } B = 3 \times \text{dét}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \times \text{dét}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-4) \times \text{dét}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Dét } B = 3(0 \times 3 - 6 \times 2) - 4(1 \times 3 - 6 \times -1) + (-4)(1 \times 2 - 0 \times -1) = -36 - 36 - 8 = -80$$

Une autre méthode pour trouver le déterminant de $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

Il faut répéter les deux premières colonnes et faire le calcul suivant :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | a | b |
| d | e | f | d | e |
| g | h | i | g | h |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | a | b |
| d | e | f | d | e |
| g | h | i | g | h |

det A = (a x e x i + b x f x g + c x d x h) – (b x d x i + a x f x h + c x e x g)

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det B = (3 \times 0 \times 3 + 4 \times 6 \times -1 + -4 \times 1 \times 2) - (4 \times 1 \times 3 + 3 \times 6 \times 2 + -4 \times 0 \times -1)$$

$$\det B = (0 - 24 - 8) - (12 + 36 + 0)$$

$$\det B = -32 - 48 = -80$$

# Mathématiques 30411-B

Exercices de révision

1. Trouve le déterminant des matrices suivantes.

a) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$  c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}$  e) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & -1 & 11 \\ 10 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

2. Opérations de base sur les matrices

a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -5 & -6 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

c) $-5\begin{bmatrix} 5 & 6 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $-5\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix}$

f) $5\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

g) $-5\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

h $5\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

i) $-2u\begin{bmatrix} 7u & 3w^2 & 5u & 5 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

k) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

l) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$

m) $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

n) $-4\left(\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\right)$

o) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

p) $-2\begin{bmatrix} -3 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

**Matrice inverse**

Si A et B sont des matrices carrées de même ordre telles que AB= BA = I, alors la matrice B est dite matrice inverse de A et nous noterons B= $A^{-1}$. Bien sûr, A est la matrice inverse de B et A = $B^{-1}$.

Soient les matrices $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, détermine si B est la matrice inverse de A.

**Inverse d'une matrice par la méthode échelonnée**

On place la matrice à gauche et la matrice identité à droite. Il faut réussir à avoir la matrice identité à gauche en effectuant des transformations.

Pour faire les transformations,

i) on peut permuter deux lignes
ii) on peut multiplier/diviser une ligne par un scalaire
iii) on peut soustraire/additionner deux lignes
iv) on doit écrire en ligne de la ligne les changements que subit la ligne.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle \times 4 \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle \times 3 \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\langle 1 \rangle \div 4 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \quad \text{donc } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ex : Trouve la matrice inverse de $D=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

# Mathématiques 30411-B

Exercices

1. a) La matrice B représente-t-elle l'inverse de la matrice A ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

b) La matrice F représente-t-elle l'inverse de la matrice E ?

$$E = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c) La matrice Y représente-t-elle l'inverse de la matrice X ?

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

2. Trouve l'inverse des matrices suivantes, par la méthode échelonnée.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

**Matrice augmentée ou Gauss Jordan**

On se rappelle de trois méthodes déjà apprises pour résoudre des systèmes d'équations, soient graphiquement, par substitution et par élimination. En voilà une qui s'ajoute, soit par la méthode de la matrice augmentée.

On appelle **matrice augmentée** la matrice que nous noterons (A | b) et qui est constituée des coefficients du système et ses constantes :

Exemple : Résous
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 20 \\ 2x - 3y &= 14 \end{aligned}$$

Il faut placer les variables dans le même ordre, comme exemple, les termes contenant des x en premier et les y ensuite avec les constantes de l'autre côté du signe =. Placer ces coefficients dans la matrice.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 20 \\ 2 & -3 & 14 \end{array}\right]$$

Cette méthode consiste à transformer ce système à l'aide des opérations élémentaires comme lorsqu'on trouvait la matrice inverse.

L'ordre à suivre pour résoudre une 2 x 2 est $\begin{bmatrix} 4^e & 3^e \\ 1^{er} & 2^e \end{bmatrix}$

# Mathématiques 30411-B

Pour faire les transformations, on fonctionne comme avec la méthode d'élimination, on peut permuter deux lignes, on peut multiplier/diviser une ligne par un scalaire ou on peut soustraire/additionner deux lignes. On doit écrire en ligne de la ligne les changements que subit la ligne

| Élimination | Matrice augmentée |
|---|---|
| $\boxed{1}\quad 3x-4y=20$<br>$\boxed{2}\quad 2x-3y=14$ | $\begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{2} \end{array} \left[\begin{array}{cc\|c} 3 & -4 & 20 \\ 2 & -3 & 14 \end{array}\right]$ |
| $\boxed{1}\times 2\quad 6x-8y=40$<br>$\boxed{2}\times 3\quad 6x-9y=42$ | $\begin{array}{c} \\ \boxed{2}\times 3-\boxed{1}\times 2 \end{array} \left[\begin{array}{cc\|c} 3 & -4 & 20 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$ |
| $\boxed{1}-\boxed{2}\quad y=-2$ | $\begin{array}{c} \\ \boxed{2}\div -1 \end{array} \left[\begin{array}{cc\|c} 3 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ |
| $\boxed{1}\quad 6x-8(-2)=40$<br>$6x=40-16$ | $\begin{array}{c} \boxed{1}+\boxed{2}\times 4 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc\|c} 3 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ |
| $\boxed{1}\quad 6x=24$<br>$x=4$ | $\begin{array}{c} \boxed{1}\div 2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ |
| Solution $(4,-2)$ | Solution $(4,-2)$ |

Si on doit résoudre un système à trois équations et trois inconnus, l'ordre est :

$$\begin{bmatrix} 9^e & 8^e & 7^e \\ 1^{er} & 6^e & 5^e \\ 2^e & 3^e & 4^e \end{bmatrix}$$

Exemple : Résous le système suivant :

$2x-y+3z=0$

$x+y-2z=1$

$3x+2y+4z=-13$

On le représente sous forme de matrice augmentée : $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -13 \end{array}\right]$

**1** $\begin{array}{c} \\ \boxed{1}-\boxed{2}\times 2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -13 \end{array}\right]$

**2** $\begin{array}{c} \\ \\ \boxed{1}\times 3-\boxed{3}\times 2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & 1 & 26 \end{array}\right]$

**3** $\begin{array}{c} \\ \\ \boxed{2}\times 7-\boxed{3}\times 3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 46 & -92 \end{array}\right]$

**4** $\begin{array}{c} \\ \\ \boxed{3}\div 46 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

**5** $\begin{array}{c} \\ \boxed{2}-\boxed{3}\times 7 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

**6** $\begin{array}{c} \\ \boxed{2}\div -3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

**7** $\begin{array}{c} \boxed{1}-\boxed{3}\times 3 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

**8** $\begin{array}{c} \\ \boxed{1}-\boxed{2} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

**9** $\begin{array}{c} \boxed{1}\div 2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

donc x = 1, y = -4 et z = -2

# Mathématiques 30411-B

Résous à l'aide de la méthode Gauss-Jordan (matrice augmentée).

1. a) $\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 3x - y &= 11 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 5x + 6y &= 70 \\ 3x - 12y &= -270 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + 3y + z &= 3 \\ x + 5y + 5z &= 1 \\ 2x + 6y + 3z &= 8 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x + 6y + 6z &= 3 \\ x + 3y + 10z &= -10 \\ x + 2y + 5z &= -11 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x - 10y + 3z &= -20 \\ x - 3y + 7z &= 0 \\ x - 5y + z &= -10 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x + z &= 12 \\ x - y &= 16 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$

2. Dans une école, on retrouve 675 élèves de la dixième à la douzième année. Il y a 50 élèves de plus en dixième qu'en onzième et 25 élèves de plus en douzième qu'en onzième. Combien d'élèves retrouve-t-on dans chaque niveau ? Réponds à cette question en créant une matrice pour un système de trois équations à trois inconnus et en appliquant la méthode de la matrice augmentée.

**Méthode Règle de Cramer**

Dans la Règle de Cramer, on trouve la valeur de la variable en calculant le rapport du déterminant obtenu par le remplacement de la colonne des coefficients de la variable par la colonne des résultats, divisé par la matrice initiale. x = $\dfrac{dx}{\det A}$

Ex : 3x + y = 7

2x - 5y = -1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad et \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{det\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}} = \frac{(7)(-5)-(1)(-1)}{(3)(-5)-(1)(2)} = \frac{-35+1}{-15-2} = \frac{-34}{-17} = 2$$

$$y = \frac{det\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}} = \frac{(3)(-1)-(7)(2)}{(3)(-5)-(1)(2)} = \frac{-3-14}{-15-2} = \frac{-17}{-17} = 1$$

Donc x = 2 et y = 1

# Mathématiques 30411-B

Avec une matrice carrée de 3x3, nous trouvons le déterminant de la façon suivante :
La méthode des cofacteurs nous permet de trouver le déterminant de n'importe quelle matrice carrée peu importe sa dimension. Pour trouver le déterminant, on aura besoin du mineur et du cofacteur.
Le **mineur** d'un élément $a_{ij}$ d'une matrice carrée A, est le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en éliminant sa i ième ligne et sa j ième colonne de A.
Afin de trouver le mineur de $a_{32}$, on élimine la troisième ligne et la deuxième colonne et on calcule le déterminant des termes restants.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{Dét } A = a_{11} \times dét\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \times dét\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \times dét\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \qquad DétA = a \times dét\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \times dét\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \times dét\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$DétA = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Ex :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{Dét B} = 3 \times dét\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - 4 \times dét\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + (-4) \times dét\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dét B} = 3(0 \times 3 - 6 \times 2) - 4(1 \times 3 - 6 \times -1) + (-4)(1 \times 2 - 0 \times -1)$$

Dét B = -36 – 36 – 8 = -80

Exercices
Résoudre avec la méthode Cramer

a) $\begin{matrix} 3x + y = -1 \\ x - y = 3 \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} 3x + 4y = -1 \\ 5y - 3x = -2 \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} 4x - 8y = -5 \\ -2x + 5y = \frac{5}{2} \end{matrix}$

d) $\begin{matrix} 2x - 3y + z = 11 \\ 3x - y + 2z = 10 \\ 5x + 4y - z = 1 \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} 3x - 2y + 4z = -7 \\ 5x + 7y - z = 16 \\ x + y - z = 6 \end{matrix}$

# Mathématiques 30411-B

1 - Démontrer une compréhension du concept du nombre et l'utiliser pour décrire des quantités du monde réel.

1.4 Modéliser des problèmes à l'aide de la théorie des ensembles

2 - Effectuer des opérations avec différentes représentations numériques afin de résoudre des problèmes du monde réel.

2.5 Résoudre des problèmes pouvant se modéliser à l'aide de la théorie des ensembles.

- Ensemble vide et universel
- Élément d'un ensemble
- Sous-ensemble
- Opérations sur les ensembles
  - ◊ Union
  - ◊ Intersection
  - ◊ Complément
  - ◊ Différence

Un ensemble est défini à l'aide d'accolades.

Ensemble : collection d'objets mathématiques distincts.

Ex : l'ensemble des nombres naturels est $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Élément : chaque objet d'un ensemble.

Ex : 3 est un élément de C, l'ensemble des chiffres.

Ensemble universel : ensemble de tous les éléments considérés dans un contexte particulier. L'ensemble universel est aussi appelé espace échantillonnal.

Ex : l'ensemble universel des chiffres est $\mathbb{C} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Sous-ensemble : ensemble dont les éléments appartiennent tous à un autre ensemble.

Ex : l'ensemble des chiffres impairs est $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. On écrit cette relation $I \subset \mathbb{C}$

Complément : ensemble des éléments d'un ensemble universel qui n'appartiennent pas à un sous-ensemble donné.

Ex : $I' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ car ce sont les chiffres qui sont dans l'ensemble universel mais pas dans le sous-ensemble I.

Ensemble-vide : ensemble qui ne contient aucun élément.

Ex : l'ensemble des nombres impairs divisibles par 2 est un ensemble-vide. L'ensemble vide se définit par $\{\ \}$ ou $\varnothing$.

Ensembles disjoints : deux ensembles ou plus qui n'ont aucun élément en commun.

Ex : l'ensemble des nombres pairs et celui des nombres impairs sont disjoints.

# Mathématiques 30411-B

Le nombre d'éléments dans l'ensemble X est noté par n(X).

Ex : si $X = \{1 \text{ à } 100\}$, donc $n(X) = 100$.

Résumé : L'ensemble des nombres de 1 à 500

$U = \{1, 2, 3, \ldots 498, 499, 500\}$ ou $\{x \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq x \leq 500\}$

a) Détermine le sous-ensemble C, tous les multiples de 5.

$C = \{5, 10, 15\ldots, 490, 495, 500\}$ ou $\{x \in \mathbb{N}^* \mid c = 5x, 1 \leq x \leq 100\}$

$C \subset U$ car tous les éléments de C sont dans l'ensemble U.

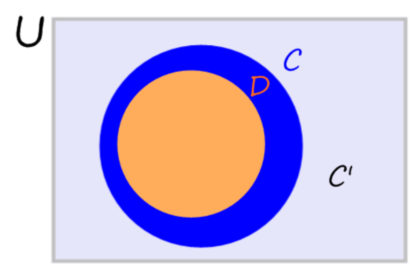
b) Détermine le sous-ensemble D, tous les multiples de 10.

$D = \{10, 20\ldots, 490, 500\}$ ou $\{x \in \mathbb{N}^* \mid d = 10x, 1 \leq x \leq 50\}$

$D \subset U$ et $D \subset C$ car tous les éléments de D sont dans l'ensemble C et dans l'ensemble U.

Représenter les ensembles dans les diagrammes de Venn.

Ex : Montre ces relations dans un diagramme de Venn.



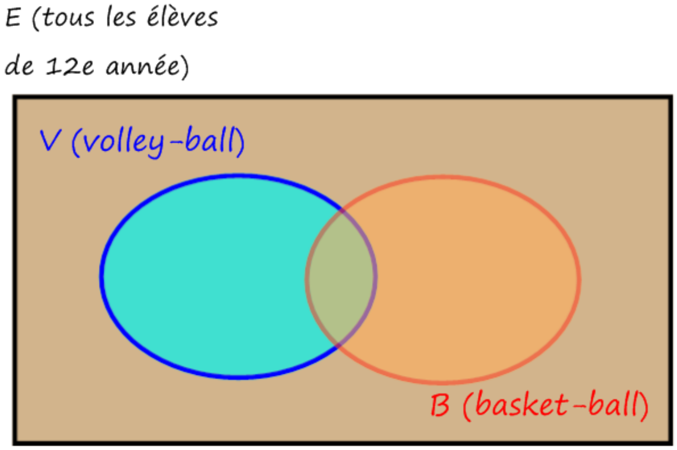

- On peut représenter un ensemble d'éléments
    - En énumérant ses éléments : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
    - En le décrivant par des mots : A = {*tous les nombres entiers supérieurs à 0 mais inférieurs à 6*}
    - A l'aide de la notation ensembliste : $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 6\}$
- On peut montrer les liens entre les ensembles et leurs sous-ensembles à l'aide de diagrammes de Venn.
- n(A) + n(A') = n(U)

Principe mathématiques 12 Vérifie ta compréhension p. 14 #2 à 9, 11, 12, 15 à 18

# Mathématiques 30411-B

Exploration des calculs p. 19

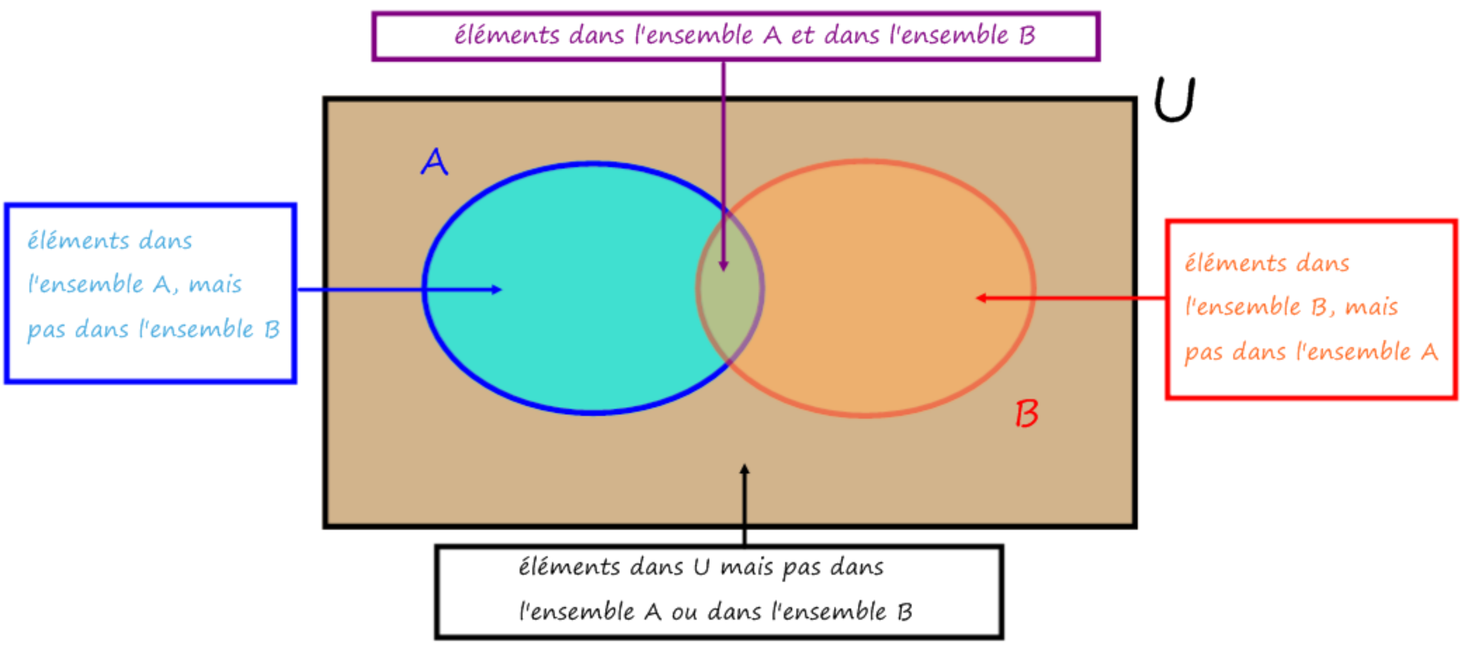
Une école albertaine compte 65 élèves de 12e année. Parmi eux, 23 jouent au volley-ball et 26 jouent au basket-ball. Il y en a 31 autres qui ne pratiquent aucun des deux sports. Le diagramme de Venn ci-dessous représente les ensembles d'élèves.




Détermine le nombre d'élèves qui jouent seulement au volley-ball, seulement au basket-ball ou au volley-ball et au basket-ball!

En résumé :

- les ensembles qui ne sont pas disjoints possèdent des éléments communs.
- Chaque région d'un diagramme de Venn représente quelque chose de différent.
- Dans un diagramme de Venn, on peut compter les éléments de deux ensembles non disjoints en comptant une seule fois les éléments dans chaque région du diagramme.
- Chaque élément d'un ensemble universel n'apparaît qu'une fois dans un diagramme de Venn.
- Dans un diagramme de Venn, un élément qui se trouve dans plus d'un ensemble sera placé dans la région où les ensembles se chevauchent.




Principe mathématiques 12 Approfondissement p. 20 # 1 à 5

Intersection et union de deux ensembles

**Intersection** : ensemble des éléments communs à deux ou plusieurs ensembles. Selon la notation ensembliste, $A \cap B$ représente l'intersection des ensembles A et B. Par exemple, si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$, alors $A \cap B = \{3\}$.

**Union** : ensemble de tous les éléments appartenant à deux ou plusieurs ensembles. La notation ensembliste de $A \cup B$ représente l'union des ensembles A et B. Par exemple, si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

**A\B se lit « A moins B »** et cela représente l'ensemble des éléments qui sont dans l'ensemble A mais pas dans l'ensemble B.

Analyse d'un problème p. 22

Jacqueline est gardienne de zoo. Elle est chargée d'alimenter les bébés animaux que leur mère ne peut pas nourrir. Elle doit alimenter un bébé raton laveur toutes les 2 heures et un bébé lémur toutes les 3 heures. Pour planifier son horaire d'alimentation, elle se sert d'une horloge à cadran de 24 heures. Elle commence à alimenter le raton laveur à 2h00 et le lémur à 3h00.

A) Soit H, chaque heure de 1h00 à 24h00. Soit R, chaque période de 2 heures jusqu'à 24 heures. Soit L, chaque période de 3 heures jusqu'à 24 heures. À l'aide de la notation ensembliste, décris l'ensemble universel H et les sous-ensembles R et L.

B) Énumère les éléments de chaque sous-ensemble.

C) Représente les ensembles H, R et L à l'aide d'un diagramme de Venn. Inscris les temps d'alimentation dans les régions appropriées.

D) Énumère les éléments dans $R \cap L$.

E) À l'aide de la notation ensembliste, énumère les éléments de l'ensemble $R \setminus L$ et de l'ensemble $L \setminus R$.

F) Énumère les éléments de l'ensemble $R \cup L$.

G) Énumère les éléments de $(R \cup L)'$.

H) De quelle façon ton diagramme de Venn montre-t-il les heures auxquelles Jacqueline aura besoin d'aide pour alimenter les deux bébés animaux ?

I) Explique si tu es d'accord ou en désaccord avec l'énoncé suivant : comme l'union de deux ensembles quelconques ressemble à l'addition de deux nombres, $n(R \cup L) = n(R) + n(L)$. Si tu es en désaccord avec l'énoncé, corrige la formule de calcul de $n(R \cup L)$.

J) Écris une formule de calcul de $n(L \setminus R)$.

Principe mathématiques 12 Exercices p. 32 # 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

# Mathématiques 30411-B

Exploration : Sarah a effectué un sondage sur les préférences des jeunes en matière de jeu. Voici les résultats.

- 20 jeunes jouent à des jeux en ligne ;
- 20 jeunes jouent à des jeux en console ;
- 20 jeunes jouent à des jeux au téléphone cellulaire.

Elle n'a sondé que 31 jeunes. Comment cela se peut-il ?

**Applications de la théorie des ensembles**

Renée a sondé des élèves de $12^e$ année sur la façon dont ils ont communiqué avec des camarades la semaine précédente :

- 66% ont téléphoné avec un cellulaire ;
- 76% ont envoyé des textos ;
- 34% se sont servis d'un site de réseautage social ;
- 56% ont téléphoné avec un cellulaire et ont envoyé des textos ;
- 18% ont téléphoné avec un cellulaire et se sont servis d'un site de réseautage social ;
- 19% ont envoyé des textos et se sont servis d'un site de réseautage social ;
- 12% ont utilisé les trois modes de communication.

a) Trace le diagramme de Venn correspondant.

b) Détermine le pourcentage des élèves qui ont envoyé des textos et se sont servis d'un site de réseautage social, mais n'ont pas téléphoné avec un cellulaire.

c) Détermine le pourcentage des élèves qui ont téléphoné avec un cellulaire et se sont servis d'un site de réseautage social, mais n'ont pas envoyé de textos.

d) Détermine le pourcentage des élèves qui ont téléphoné avec un cellulaire et ont envoyé des textos, mais ne se sont pas servis d'un site de réseautage social.

e) Détermine le pourcentage des élèves qui ont seulement téléphoné avec un cellulaire, ont seulement envoyé des textos ou se sont seulement servis d'un site de réseautage social.

# Mathématiques 30411-B

Exemple : Sers-toi des indices suivants pour répondre aux questions ci-dessous :

- 28 enfants ont un chien, un chat ou un oiseau ;
- 13 enfants ont un chien,
- 13 enfants ont un chat ;
- 4 enfants ont seulement un chien et un chat ;
- 3 enfants ont seulement un chien et un oiseau ;
- 2 enfants ont seulement un chat et un oiseau ;
- Aucun enfant n'a deux animaux de la même sorte.

a) Combien d'enfants ont un chat, un chien et un oiseau ?

b) Combien d'enfants ont seulement un animal de compagnie ?

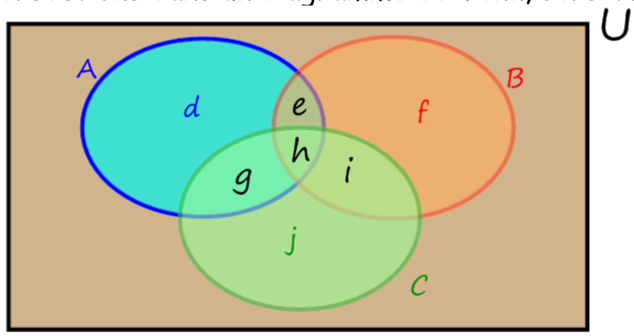
Exemple : à l'école secondaire de Charlène, on a lancé une campagne pour inciter les élèves à employer des modes de transport peu polluants pour aller à l'école et en revenir. À la fin du premier semestre, la classe de Charlène sonde les 750 élèves de l'école pour savoir si la campagne va bien. Voici les résultats du sondage :

- 370 élèves prennent les transports publics ;
- 100 élèves vont à vélo et prennent les transports publics ;
- 80 élèves vont à pied et prennent les transports publics ;
- 35 élèves vont à pied et à vélo ;
- 20 élèves vont à pied et à vélo, et prennent les transports publics ;
- 445 élèves vont à vélo ou prennent les transports publics ;
- 265 élèves vont à pied ou à vélo.

Combien d'élèves emploient des modes de transport peu polluants pour aller à l'école et en revenir?

En résumé :

- On se sert de la théorie des ensembles pour résoudre plusieurs sortes de problèmes comme les analyses de données, les jeux, les casse-tête, ainsi que les interrogations à l'ordinateur.
- Pour représenter trois intersections dans un diagramme de Venn, sers-toi de trois cercles qui se chevauchent.
- Exemple :




- $A \cap B \cap C$ est représentée par la région h ;
- $A \cap B$ est représentée par l'union des régions e et h ;
- $A \cap C$ est représentée par l'union des régions g et h ;
- $B \cap C$ est représentée par l'union des régions h et i ;

Le principe d'inclusion-exclusion te permet de déterminer le nombre d'éléments dans l'union de trois ensembles :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Exercices p. 51 # 1 à 16
Révision p. 38 # 1 à 7
Révision p. 58 # 1 à 8

# Mathématiques 30411-B

3 – Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

3.4 Modéliser des situations à l'aide de la géométrie analytique et les utiliser pour résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie.

- Point(s) d'intersection d'un cercle et d'une droite
- Longueur d'une corde