Mathématiques 30411-B/C

Bloc 1

Sens des nombres et opérations

1 - Démontrer une compréhension du concept du nombre et l'utiliser pour décrire des quantités du monde réel.

2 - Effectuer des opérations avec différentes représentations numériques afin de résoudre des problèmes du monde réel.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

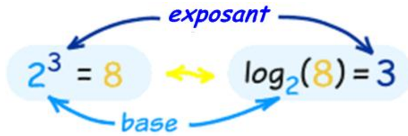
1.1 démontrer une compréhension des nombres réels et de ses sous-ensembles, des différentes façons de les représenter et des interrelations dans le but de les utiliser dans divers contextes.

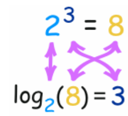
- *Logarithmes*
- *Expressions exponentielles équivalentes*
- *Radicaux*
- *Simplification d'un radical entier et radical mixte*
- *Racine n-ième d'un nombre* $\left(\sqrt[n]{x}\right)$
- Logarithme naturel
- Nombre e

2.1 utiliser les propriétés des logarithmes et des radicaux pour résoudre des problèmes

- Propriétés sur les logarithmes $\left(a, B, x, y \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1, B \neq 1\right)$
  - ❖ $\log_B(1) = 0$, $\log_B(B) = 1$, $\log_B(B^x) = x$, $\log_B x^y = y\log_B x$, $\log_B x = \dfrac{\log_a x}{\log_a B}$
  - ◊ $\log_B xy = \log_B x + \log_B y$
  - ◊ $\log_B\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_B x - \log_B y$
- Propriétés sur les radicaux
  - ◊ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \begin{cases} \text{si } a \in \mathbb{R}_+, m, n \in \mathbb{N}^* \\ \text{si } a \in \mathbb{R}_-, m, n \in \mathbb{N}^* \text{ lorsque } n \text{ est impair} \end{cases}$
  - ◊ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, a, b \in \mathbb{R}_+$
  - ◊ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a, b \in \mathbb{R}_+, b \neq 0$

La réciproque (fonction inverse) de la fonction exponentielle se nomme la fonction logarithmique, elle permet d'isoler l'exposant de la fonction exponentielle.





Exemple 1. Transforme chaque expression écrite en forme logarithmique en forme exponentielle et vice-versa.

a) $7^x = 25$

b) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

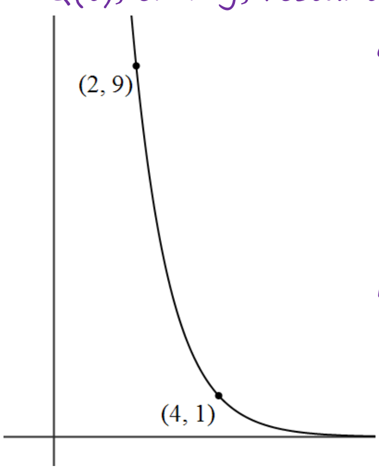
Exemple 2. Détermine la valeur de x dans chaque équation.

a) $\log_8 x = \frac{1}{3}$

b) $5^x = 37$

c) $2^{x+1} = 3^x$

Exemple 3. Voici le graphique d'une fonction exponentielle présentant la quantité, Q(t), en mg, restante d'un médicament après t heures après son injection.



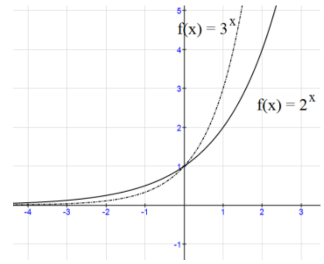
a) Détermine la règle de la forme $Q(t) = Q_o B^t$ modélisant cette situation.

b) Quelle est la demi-vie de ce médicament dans le sang ?

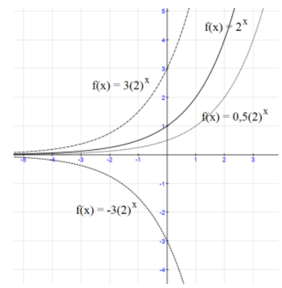
c) On doit faire une nouvelle injection lorsque la quantité dans le sang est de 5 mg. Après combien de temps doit-on faire cette nouvelle injection après l'injection initiale ?

Mathématiques 30411-B/C

Rappel sur les paramètres de la fonction exponentielle.



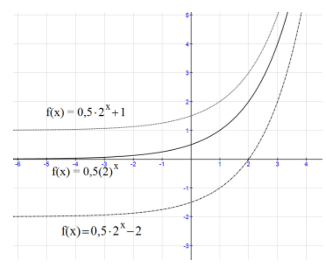
Soit la fonction exponentielle de la forme $f(x) = B^x$
Lorsque B > 1, la fonction exponentielle est croissante tandis qu'elle est décroissante lorsque 0 < B < 1. Dans les deux cas, la fonction exponentielle s'approche d'une valeur limite, soit 0 dans les deux cas précédents. On appelle asymptote la droite vers laquelle la courbe de f(x) s'approche lorsque x tend vers ±∞.
La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = B^x$ passe toujours par le point (0, 1).
Soit B > 1. Plus la valeur de B augmente, plus la croissance de la fonction est rapide.



Rôles du paramètre a

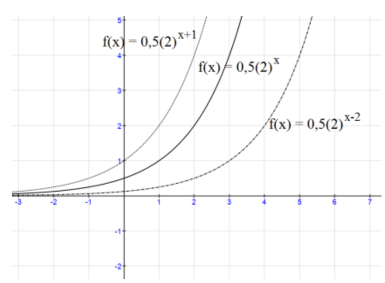
La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = a\,B^x$ passe toujours par le point (0, a). Lorsque le paramètre a est négatif, la courbe subit une réflexion par rapport à l'axe des x.

Rôles du paramètre k



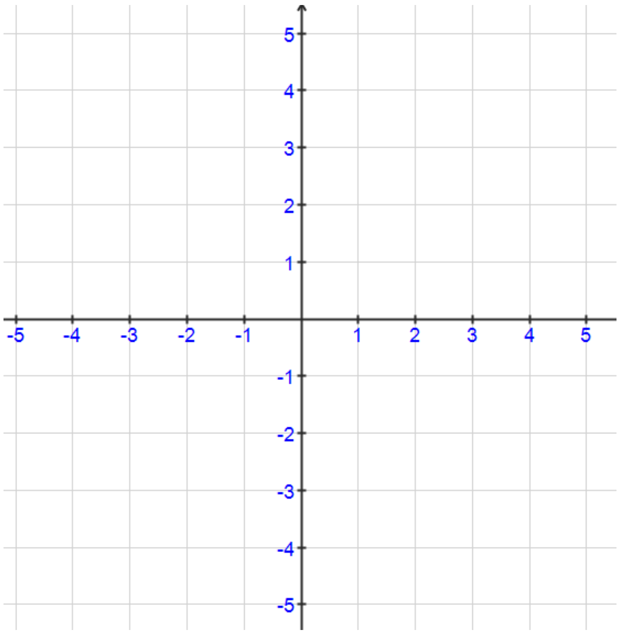
La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = a\,B^x + k$ passe toujours par le point (0, a+k).
L'équation y = k est l'équation de l'asymptote de la fonction.

Rôles du paramètre h



La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = a\,B^{x-h} + k$ passe toujours par le point (h, a + k). Le graphique subit une translation horizontale.

Exemple 4. Esquisse le graphique de la fonction $f(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3$



Devoir : Parcours B et C : Omnimaths 12, pages 126-127, nos 2, 4, 5, 9, 10, 13, 19, 21, 25a, 33, 35 et les exercices 1 à 3 ci-dessous.

Exercices :

1. Dans une grande ville, 10 personnes sont atteintes par un virus incurable. En un jour, chaque personne infectée contamine trois autres sujets. Après combien de jours y aura-t-il 50 000 personnes infectées par ce virus ?
2. La population d'une certaine espèce d'oiseau diminue d'un tiers à chaque trois mois. Après combien de temps la population sera la moitié de la population initiale ?
3. En faisant rouler une boule de neige sur une pente enneigée, son volume augmente de 10% par mètre. Son volume initial est de 0,5 m^3.
   a) Quel sera le volume de la boule après qu'elle ait roulé 8 mètres ?
   b) Après combien de mètres la boule aura-t-elle un volume de 10 m^3?
   c) Détermine la règle de *V(d),* la fonction modélisant le volume de la boule de neige, *V(d)*, en m^3, en fonction de la distance parcourue, *d*, en mètres. Trace une esquisse de celle-ci.
   d) Détermine la fonction d(V), soit la distance *d(V)* que doit avoir parcouru la boule de neige avant d'avoir un volume *V*.
   e) Écris la fonction exponentielle de la forme $V(d) = a\,2^{bd}$.

Mathématiques 30411-B/C

Utilise les lois des logarithmes

Exemple 1 : Sans utiliser la calculatrice, détermine la valeur de chaque expression.

a) $\log_5 100 + \log_5 0{,}25$ b) $\log_2 384 - \log_2 12$

Exemple 2 : Exprime sous un seul logarithme : $\log \mathrm{A} - 3\log \mathrm{B} + 3\log\sqrt{\mathrm{C}}$

Exemple 3 : Soient x et y tels que $\mathrm{x} = \log_4 5$ et $\mathrm{y} = \log_4 3$.

Exprime $\log_4 300$ en fonction de x et y.

Exemple 4 : Soit le niveau sonore d'un son, β, mesuré en décibels et son intensité, I, mesurée en W/m². La relation entre le niveau sonore et l'intensité de deux sons suit la règle :

$$\beta_2 - \beta_1 = 10\log\frac{I_2}{I_1}$$

a) Détermine combien de fois le niveau sonore d'un son de 100 dB dépasse celui d'un son de 85 dB.

b) Le niveau sonore du chuchotement est de 20 dB. Un son 100 000 fois plus intense que le chuchotement est jugé sans danger. Quelle est le niveau sonore de ce son ?

Exemple 5 (Parcours C). Démontre la loi suivante.

$$\log_c MN = \log_c M + \log_c N$$

Devoir : Parcours B : Omnimaths 12, pages 106-107, nos 1, 3, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 27, 31, 37, 41, 47, 48, 49

Parcours C : Pré-Calcul 12, pages 400-402, nos 1cd, 2a, 3b, 5ab, 7, 8d, 9d, 12bd, 13bc (utilisez la relation de l'exemple 4), 14, 15, 17 et les 2 exercices suivants.

1. Évalue. a) $10^{\log 7 + \log 5}$ b) $3^{\log_3 7 - \log_3 5}$ c) $8^{\log_2 7}$ d) $2^{\log_4 9}$
2. (Défi) Écris sous un seul logarithme : $\log_3 2 - \log_9 7$.

3.6 Retour sur la factorisation et les expressions rationnelles

Simplification d'expressions rationnelles

On dit qu'un nombre rationnel est réduit ou simplifié, si le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs, sauf 1.

Les expressions rationnelles sont sous la forme la plus simple, quand elles sont exprimées comme le quotient de deux polynômes, dont le plus grand facteur commun est 1.

Pour simplifier les expressions rationnelles :

Factoriser le numérateur et le dénominateur.

Diviser, à la fois, le numérateur et le dénominateur par chaque facteur commun à tous deux.

Puisque la division par zéro n'est pas définie, il faut placer des restrictions sur les variables des expressions rationnelles, afin d'empêcher la division par zéro.

Ex : Réduire les expressions rationnelles aux termes les plus simples, et indiquer toute restriction imposée à la variable.

a) $\frac{x^2-9}{x^2-x-6}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x+3}{x+2}$, restrictions : $x \neq 3, -2$

b) $\frac{x^2-x-20}{15+2x-x^2}=\frac{(x-5)(x+4)}{-(x^2-2x-15)}=\frac{(x-5)(x+4)}{-(x-5)(x+3)}=\frac{x+4}{-(x+3)}$ ou $\frac{-x-4}{x+3}$ restrictions : $x \neq 5, -3$

Exemple :

a) $\frac{9m^2-12m}{16-12m}$ b) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-x-6}$ c) $\frac{6b^2-b-12}{4b^2-9}$

EXPRESSIONS RATIONNELLES 1

Simplifie les expressions rationnelles suivantes et indique les restrictions.

a) $\dfrac{2x+2}{3x+3}$

b) $\dfrac{5y-10}{10y-20}$

c) $\dfrac{6k^2+3k}{8k+4}$

d) $\dfrac{3m^2-5m}{3m^3-5m^2}$

e) $\dfrac{8w^3+24w^2}{2w^2+6w}$

f) $\dfrac{15x-30x^2}{3x^2-6x^3}$

g) $\dfrac{2r^2+2rs-6r}{4r+4s-12}$

h) $\dfrac{3a+3b+3}{2a-2b-2}$

i) $\dfrac{k^2+3k+2}{k^2+k-2}$

j) $\dfrac{m^2+8m+15}{m^2+6m+5}$

k) $\dfrac{y^2+7y+12}{y^2+5y+6}$

l) $\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-4x-21}$

m) $\dfrac{a^2-7a+10}{a^2-a-20}$

n) $\dfrac{n^2-5n-24}{n^2-9n+8}$

o) $\dfrac{2y^2+3y+1}{2y^2+7y+3}$

p) $\dfrac{a^2-2a-3}{a^2+6a+8}$

q) $\dfrac{y^2-16}{y^2+4y-32}$

r) $\dfrac{y^2-9}{y^2-6y+9}$

s) $\dfrac{y^2-5y+6}{y^2-4}$

t) $\dfrac{10ab-15a^2b}{12a^2-8a}$

u) $\dfrac{2y-7}{2y^2-y-21}$

v) $\dfrac{6x^2-x-1}{4x^2-1}$

w) $\dfrac{x^2+10xy+25y^2}{x+5y}$

x) $\dfrac{6x^2-5xy+y^2}{6x^2-xy-y^2}$

y) $\dfrac{2p^2+3pq+q^2}{3p^2+2pq-q^2}$

z) $\dfrac{25x^2-9y^2}{5x^2+8xy+3y^2}$

3.6 Le théorème du reste

◊ Théorème du reste

Rappel – division des polynômes.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2+11x+14 \\ \hline x-1 & 3x^3+8x^2+3x-2 \\ & \underline{3x^3-3x^2} \\ & \quad 11x^2+3x-2 \\ & \quad \underline{11x^2-11x} \\ & \qquad 14x-2 \\ & \qquad \underline{14x-14} \\ & \qquad\quad 12 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 8 & 3 & -2 \\ & & 3 & 11 & 14 \\ \hline & 3 & 11 & 14 & 12 \end{array}$$

- descends le premier nombre,
- multiplies ce nombre avec le nombre sur le côté,
- places ce résultat en dessous du deuxième nombre,
- additionne les nombres de la deuxième colonne,
- multiplies ce résultat avec le nombre du côté,
- places ce résultat en dessous du troisième nombre, etc…

Lorsque tu as fini, le dernier nombre est le reste et les autres nombres sont les coefficients de l'autre facteur.

Les facteurs sont donc de $3x^3+8x^2+3x-2=(x-1)(3x^2+11x+14)$, reste 12

Polynôme, P(x)	Diviseur, x - b	Quotient	Reste	P(b)
$x^2 - 7x + 16$	$x - 3$ $\begin{array}{r\|rrr} 3 & 1 & -7 & 16 \\ & & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} & x-4 \\ \hline x-3 & x^2-7x+16 \\ & \underline{x^2-3x} \\ & -4x+16 \\ & \underline{-4x+12} \\ & 4 \end{array}$	4	$P(3)=(3)^2-7(3)+16$ $P(3)=9-21+16$ $P(3)=4$ Donc $\frac{x^2-7x+16}{x-3}=x-4+\frac{4}{x-3}$
$2x^2 + 3x - 8$	$x - 2$ $\begin{array}{r\|rrr} 2 & 2 & 3 & -8 \\ & & 4 & 14 \\ \hline & 2 & 7 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} & 2x+7 \\ \hline x-2 & 2x^2+3x-8 \\ & \underline{2x^2-4x} \\ & 7x-8 \\ & \underline{7x-14} \\ & 6 \end{array}$	6	$P(2)=2(2)^2+3(2)-8$ $P(2)=8+6-8$ $P(2)=6$ $\frac{2x^2+3x-8}{x-2}=2x+7+\frac{6}{x-2}$
$x^3 + 3x^2 - 3x - 2$	$x - 1$ $\begin{array}{r\|rrrr} 1 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ & & 1 & 4 & 1 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} & x^2+4x+1 \\ \hline x-1 & x^3+3x^2-3x-2 \\ & \underline{x^3-x^2} \\ & 4x^2-3x-2 \\ & \underline{4x^2-4x} \\ & x-2 \\ & \underline{x-1} \\ & -1 \end{array}$	-1	$P(1)=(1)^3+3(1)^2-3(1)-2$ $P(1)=1+3-3-2$ $P(1)=-1$ $\frac{x^3+3x^2-3x-2}{x-1}=x^2+4x+1-\frac{1}{x-1}$

Mathématiques 30411-B/C

Théorème du reste : Quand on divise un polynôme $P(x)$ par $ax - b$ et que le reste est un terme constant, alors le reste est $P(b/a)$.

Ex : Trouve le reste de la division du polynôme $2x^3 - 4x^2 + 3x - 6$ par $x + 2$.

Ex : Quand on divise le polynôme $y^3 - ky^2 + 17y + 6$ par $y - 3$, le reste est 12. Quelle est la valeur de k?

Ex : Quand on divise le polynôme $P(x) = 3x^3 + mx^2 + nx - 7$ par $x - 2$, le reste est -3. Quand on divise ce polynôme par $x + 1$, le reste est -18. Quelles sont les valeurs de m et n?

Devoir : Parcours B : Exercices sur le théorème du reste, nos 1-6

Parcours C : Exercices sur le théorème du reste, nos 1-8, Pré-calcul 12, page 125, nos 13abc, 17a

Mathématiques 30411-B/C

Devoir : Théorème du reste

1) Utilise le théorème du reste pour déterminer le reste de chaque division.
   a) $(2w^3 + 3w^2 - 5w + 2) \div (w + 3)$ b) $(x^3 + 2x^2 - 4x + 1) \div (2x - 1)$

2) Détermine la valeur de k si le reste est 3. $(x^3 + 4x^2 - x + k) \div (x - 1)$

3) Quand on divise le polynôme $4x^3 + mx^2 + nx + 11$ par $x + 2$, le reste est -7. Quand on le divise par $x - 1$, le reste est 14. Quelles sont les valeurs de *m* et *n*?

4) Les divisions $(2x^3 + 4x^2 - kx + 5) \div (x + 3)$ et $(6y^3 - 3y^2 + 2y + 7) \div (2y - 1)$ ont le même reste. Détermine la valeur de *k*.

5) La division de $ka^3 - 3a^2 + 5a - 8$ par $a - 2$ donne un reste de 22. Quel est le reste de la division de $ka^3 - 3a^2 + 5a - 8$ par $a + 1$?

6) L'expression $h^2 + 0{,}5h$, où *h* est la hauteur, représente l'aire d'un triangle, *A(h)*.
   a) Quel est le reste quand on divise cette expression par $2h - 7$?
   b) Interprète le reste.

7) La travée principale du pont Tsing Ma, situé à Hong Kong, est la plus longue travée de tous les ponts suspendus du monde. Si on fait correspondre l'origine à la chaussée de la travée principale, au-dessous du point le moins élevé d'un câble de soutien, on peut représenter la forme du câble par la fonction $h(d) = 0{,}0003d^2 + 2$, où *h(d)* est la hauteur du câble au-dessus de la chaussée, en mètres, et *d*, la distance horizontale, en mètres, à partir du point le moins élevé du câble.
   a) Trouve le reste de la division de $0{,}0003d^2 + 2$ par $d - 500$.
   b) Trouve le reste de la division de $0{,}0003d^2 + 2$ par $d + 500$.

8) Le lancer du marteau est une épreuve olympique. Lors d'un lancer, on peut représenter la trajectoire du marteau par la fonction $h(d) = -0{,}017d^2 + 1{,}3d + 2{,}5$, où *h(d)* est la hauteur du marteau, en mètres, et *d*, la distance horizontale franchie par le marteau, en mètres, depuis le point de lancement.
   a) Divise le polynôme $-0{,}017d^2 + 1{,}3d + 2{,}5$ par $d - 50$.
   b) Interprète le reste que tu as obtenu en a)
   c) Divise le polynôme $-0{,}017d^2 + 1{,}3d + 2{,}5$ par $d - 80$.
   d) Le reste de la partie c) a-t-il un sens dans le contexte du lancer du marteau? Explique.

<u>Réponses :</u>

1. a)-10 b)$-\frac{3}{8}$ 2. -1 3. m= 2, n= -3 4. 7 5. -20 6. a)14 b) Lorsque la hauteur est de $\frac{7}{2}$ unités, l'aire est de 14 unités carrées. 7. a) 77 b) 77 8. a) -0,017d + 0,45; r =25 b) Lorsque la distance horizontale est de 50 m, la hauteur est de 25 m. c) -0,017d-0,06; r=-2,3 d) Non. Le marteau ne peut pas avoir une hauteur négative.