Mathématiques 30411-C

Bloc 1 – Partie 2

3 - Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES
3.6 Opérer sur des expressions algébriques.

- Opérations sur les expressions rationnelles

Ex : Multiplier $\frac{x+1}{x^2-x-6}\times\frac{x^2-7x+12}{x^2-16}$, c'est plus simple si on simplifie en premier.

$$\frac{x+1}{(x-3)(x+2)}\times\frac{(x-3)(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{(x+1)}{(x+2)(x+4)};x\neq 3,-2,4,-4$$

On divise des expressions rationnelles de la même manière que les nombres rationnels.
Rappel : $\frac{1}{2}\div\frac{4}{5}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{1\times 5}{2\times 4}=\frac{5}{8}$ (on n'oublie pas d'inverser l'expression rationnelle de la 2^e fraction)

Ex : Simplifier

$$\frac{x^2-9y^2}{x^2+4xy}\times\frac{x^2+9xy+20y^2}{x^2+10xy+21y^2}\div x^2+2xy-15y^2$$
$$=\frac{x^2-9y^2}{x^2+4xy}\times\frac{x^2+9xy+20y^2}{x^2+10xy+21y^2}\times\frac{1}{x^2+2xy-15y^2}$$
$$=\frac{(x-3y)(x+3y)}{x(x+4y)}\times\frac{(x+4y)(x+5y)}{(x+3y)(x+7y)}\times\frac{1}{(x+5y)(x-3y)}$$
$$=\frac{1}{x(x+7y)};x\neq 0,-4y,-3y,-7y,-5y,3y$$

Exemple 1. Simplifie les expressions suivantes.

a) $\frac{x^2+8}{x^2+x-2}\times\frac{2x-2x^2}{2x^3-4x^2+8x}$

b) $\dfrac{\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+6x^2+11x+6}\right)}{\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+4x+3}\right)}$

c) $\dfrac{4}{2x-2} - \dfrac{2+x}{1-x}$

d) $\dfrac{x^2+7x}{x^3+4x^2+x-6} - \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

e) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{x}{2-x}}{x^2-1}$

Mathématiques 30411-C

Feuille de travail

1. Simplifie les expressions rationnelles et indique les restrictions.

a) $\dfrac{7}{x^2-9} \div \dfrac{x+4}{x+3}$

b) $\dfrac{x^2+1}{x^3-3x^2+x-3}$

c) $\dfrac{-5}{16-x^2} \div \dfrac{10}{x-4}$

d) $\dfrac{x+4}{3-x} \times \dfrac{x^2-9}{x^2+16}$

e) $\dfrac{4x^2-9}{x^2-10x+25} \div \dfrac{2x-3}{x-5}$

f) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+4} \cdot \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3} \div (x+5)$

g) $\dfrac{x^5+2x^2-x+2}{x^2+1}$

h) $\dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x-1}$

i) $\dfrac{6x^2+x-1}{6x^2+5x+1} \div \dfrac{3x^2+2x-1}{3x^2+4x+1}$

j) $\dfrac{x^3-3x^2-6x+8}{8x-32} \div \dfrac{x^2+x-2}{12x^2-16x+4}$

k) $\dfrac{8x^3-1}{2x^3-5x^2-4x+3} \times \dfrac{3x^2-6x-9}{24x^2+12x+6}$

2. Écris les expressions suivantes sous forme d'une expression rationnelle et indique les restrictions.

a) $\dfrac{x-3}{x-1} - \dfrac{4x-6}{x-1}$

b) $\dfrac{5}{x-3} + \dfrac{x+4}{3-x}$

c) $\dfrac{x}{x^2+3x+2} + \dfrac{1}{x^2+x}$

d) $\dfrac{x-3}{x^2-x-2} + \dfrac{4x+2}{x^2-4}$

e) $5 - \dfrac{4x^2+3}{x^2-2x-8}$

f) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^3-x^2-9x-6} + \dfrac{x-2}{x^2-4}$

g) $\dfrac{x}{x^2+3x-18} + \dfrac{1}{x^2+6x} - \dfrac{1}{x^2-3x}$

h) $\dfrac{2}{y+3} - \dfrac{y}{y-1} + \dfrac{y^2+2}{y^2+2y-3}$

i) $\dfrac{\dfrac{6x}{x^2+x-2}}{\dfrac{4}{x+2} - \dfrac{1}{x-1}}$

j) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}}$

k) $\dfrac{\dfrac{x^2y}{x+y}}{xy}$

l) $\dfrac{x^{-1}-2}{x^{-1}+3}$

Solutions :

1. a) $\dfrac{7}{(x-3)(x+4)}$ $R: x \neq \{-4,-3,3\}$ b) $\dfrac{1}{x-3}$ $R: x \neq \{3\}$ c) $\dfrac{1}{2(4+x)}$ $R: x \neq \{-4,4\}$ d) $\dfrac{-(x+4)(x+3)}{x^2+16}$ $R: x \neq \{3\}$

e) $\dfrac{2x+3}{x-5}$ $R: x \neq \left\{\dfrac{3}{2},5\right\}$ f) $\dfrac{1}{x+5}$ $R: x \neq \{-5,-3,-2,1\}$ g) $x^3 - x + 2$ $R: \{\}$ h) $x^2 - x + 1$ $R: x \neq \{1\}$ i) 1 $R: x \neq \{-1, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}\}$

j) $\dfrac{(x-1)(3x-1)}{2}$ $R: x \neq \left\{-2,\dfrac{1}{3},1,4\right\}$ k) $\dfrac{1}{2}$ $R: x \neq \left\{-1,\dfrac{1}{2},3\right\}$

2. a) -3 $R: x \neq \{1\}$ b) $\dfrac{1-x}{x-3}$ $R: x \neq \{3\}$ c) $\dfrac{x^2+x+2}{x(x+1)(x+2)}$ $R: x \neq \{-2,-1,0\}$ d) $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x+1)}$ $R: x \neq \{-2,-1,2\}$

e) $\dfrac{x^2-10x-43}{(x-4)(x+2)}$ $R: x \neq \{-2,4\}$ f) $\dfrac{2x^2-1}{(x+2)(x^2-3x-3)}$ $R: x \neq \{-2,2\}$ g) $\dfrac{x+3}{x(x+6)}$ $R: x \neq \{-6,0,3\}$

k) $\dfrac{x}{x+y}$ $R: x \neq \{0,-y\}; y \neq \{0,-x\}$ l) $\dfrac{1-2x}{1+3x}$ $R: x \neq \left\{-\dfrac{1}{3},0\right\}$

1 – Démontrer une compréhension du concept du nombre et l'utiliser pour décrire des quantités du monde réel.
2 – Effectuer des opérations avec différentes représentations numériques afin de résoudre des problèmes du monde réel.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES

1.1 Démontrer une compréhension des nombre réels et de ses sous-ensembles, des différentes façons de les représenter et des interrelations dans le but de les utiliser dans divers contextes.
- *logarithmes*

2.1 Utiliser les propriétés des logarithmes et des radicaux pour résoudre des problèmes.

Le nombre « e »

Suppose qu'on investit 1$ pendant un an à un taux d'intérêt annuel de 100%. Il reste seulement à déterminer la période de capitalisation. Complète le tableau suivant.

Période de capitalisation	Montant à échéance
Annuelle	
Semestrielle	
Mensuelle	
Quotidienne	
À chaque seconde	

En fait, plus on évalue l'expression $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ avec de grandes valeurs de n, plus on s'approche d'une nombre particulier en mathématiques, le nombre « e ». Mathématiquement, on écrit que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Ce nombre est relié à la croissance exponentielle continue et il se retrouve sur la plupart des calculatrices scientifiques et on a que e ≈ 2,718281828.

Le logarithme à base «e» est appelé logarithme naturel et est représenté par ln. Ce logarithme suit les mêmes lois et possède les mêmes propriétés que les autres logarithmes.

Exemple 1 : Évalue, au centième près les expressions suivantes.

a) e^2 b) e^{-1} c) $\ln 3$ d) $\ln e^7$

Exemple 2 : Résous

a) $e^{3x} = 27$ b) $4\ln x = 7$ c) $4e^x = 2^{x+1}$

Exemple 3 : L'équation suivante représente le volume, $V(t)$, d'une boule à mite après t semaines. $V(t) = V_o e^{-0,35t}$

a) Détermine la règle de V(t) pour une boule à mite de 2 cm de diamètre.

b) Quel est le volume cette boule à mite après 3 semaines ?

c) Après combien de temps le volume de la boule à mite sera-t-il réduit de moitié ?

d) Écris un modèle exponentiel de la forme $V(t) = V_0\left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$ représentant cette situation.

Devoir : Parcours B : Feuille de travail, nos 1, 2a, 3, 4, 5, 6, 7,
Parcours C : Feuille de travail, nos 1-11

Feuille de travail

1. Résous chaque équation. Arrondis ta réponse au millième. (No 13 à 24)

Mathématiques 30411-C

a) $1500 = 5e^{0,045x}$ b) $2 = e^{5k}$ c) $65 = e^{7n}$

d) $45 = e^{0,074y}$ e) $\ln 3,6 = 0,034t$ f) $\ln 45,3 = 0,24k$

g) $\ln 1,5 = 0,002n$ h) $\ln 625 = 2,5x$ i) $\ln(2x) + 3 = 0$

j) $\ln x^2 - \ln x = 5$ k) $\ln x + \ln 5 = 2$ l) $e^{\ln x - \ln 3} = 2$

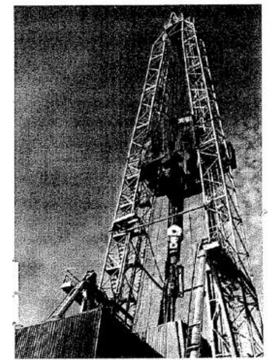
2. La règle $V = 1000e^{\frac{9t}{5}} - 1000$ permet de calculer la vitesse V (en nombre de tours/min) d'une turbine à vapeur en fonction du temps t (en min). Un système de sécurité fait en sorte que la turbine cesse de tourner lorsque sa vitesse atteint 25000 tours/min. (no 1)
   a) Combien de temps après la mise en marche de la turbine le système de sécurité s'active-t-il?
   b) Quelle est la vitesse angulaire, en rad/s, de la turbine après 3 minutes ?

3. Une tasse contenant du café dont la température est de 95° C est placée dans une pièce maintenue à une température constante de 22°C. Au bout de t min, la température (en degrés Celsius) du café est donnée par $T(t) = 22 + 73e^{-0,04667t}$.
   a) Dans combien de temps la température du café sera-t-elle de 75°C?
   b) Dans combien de temps la température du café sera-t-elle de 60°C?

4. Si deux langues ont évolué séparément à partir d'une langue ancestrale commune, l'équation suivante représente le nombre d'années qui se sont écoulées depuis le début de leur évolution séparée, $T(m) = -5000 \ln m$ où m est le pourcentage de mots de la langue ancestrale qui sont communs aux deux langues. À ton avis, si deux langues ont commencé à évoluer séparément il y a 2000 ans, quel pourcentage de mots provenant de la langue ancestrale seront communs à ces deux langues aujourd'hui?

5. Un nouveau virus se propage dans la population, de sorte que t semaines après son apparition, on compte $N(t) = \dfrac{5}{2 + 8e^{-0,45t}}$ milliers de personnes l'ayant contracté.
   a) Initialement, combien de personnes étaient porteuses du virus?
   b) Si aucune mesure n'est prise, combien de personnes auront contracté le virus 4 semaines après son apparition?
   c) Si aucune mesure n'est prise, dans combien de temps le nombre de personnes ayant contracté le virus aura-t-il doublé?
   d) Si aucune mesure n'est prise, dans combien de temps le nombre de personnes ayant contracté le virus aura-t-il triplé?

6. Lors d'un forage, la friction exercée sur la tige devient de plus en plus importante au fur et à mesure que la profondeur du trou augment, ralentissant ainsi la vitesse de rotation de la tige. Pour une profondeur P (en m), on peut calculer la vitesse de rotation v (en nombre de tours/min) à l'aide de l'inéquation $\ln P = 38 - 5 \ln V$. Établissez la règle qui permet de calculer la profondeur du trou selon la vitesse de rotation de la tige.

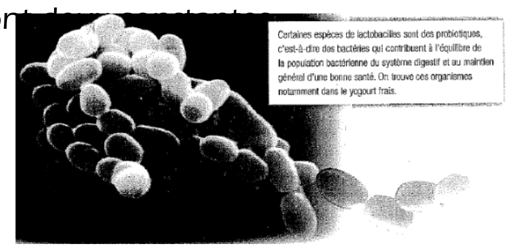


7. Dans un bassin d'épuration des eaux usées, un processus biochimique fait en sorte que la concentration de polluants diminue de 10% par jour par rapport à la journée précédente. Cette situation est définie par la règle $C = C_o e^{-0,1t}$, où C représente la concentration de polluants, t, le temps (en jours), et C_o, la concentration initiale de polluants dans l'eau acheminée vers le bassin d'épuration.
a) Cinq jours après que l'eau a été acheminée vers le bassin d'épuration, quel pourcentage de la concentration initiale de polluants reste-t-il?
b) Combien de temps l'eau doit-elle rester dans le bassin si l'on ne la libère dans l'environnement que lorsque la concentration de polluants est inférieure à 5% de la quantité initiale?

8. Une batterie consiste en un ensemble de piles électriques reliées entre elles. Lorsqu'une ou plusieurs piles d'une batterie n'ont pas la même charge, il se produit un déséquilibre entre celles-ci. La règle $T_1 = T_2 e^{-1,2x}$ détermine la tension T_1 (en V) de la pile (1) d'une batterie, selon la tension T_2 (en V) de la pile (2) et le temps x (en h).
a) la tension de la pile (1) est-elle croissante ou décroissante. Expliquez votre réponse.
b) À quelle moment la tension de la pile (1) est-elle égale à :
1) la tension de la pile (2)?
2) 75% de la tension de la pile (2)?
c) la batterie peut prendre feu si la tension d'une des piles excède le double de la tension de l'autre. À partir de quel moment y a-t-il un risque d'incendie?

9. Lorsqu'une personne prend des antibiotiques, la population bactérienne de son système digestif s'en trouve affectée. Dès la fin de la prise d'antibiotiques, la population de bactérie se met à évoluer jusqu'à ce qu'elle soit revenue à son niveau normal. Pour un traitement antibiotique de 10 jours, la fonction définie par partie $P(t)$ modélise le pourcentage de bactéries présentes dans le système digestif t jours après le début du traitement et ce, à chacune des phases de la reconstitution de la population bactérienne. Les variables A et b son

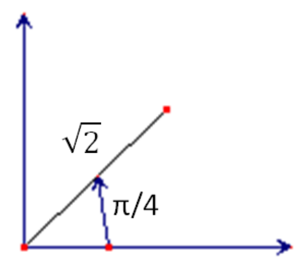
$$P(t) = \begin{cases} 100(0,9)^t & 0 \le t < 10 \\ Ae^{0,14(t-10)} & 10 \le t < b \\ 100 & t > b \end{cases}$$


Certaines espèces de lactobacilles sont des probiotiques, c'est-à-dire des bactéries qui contribuent à l'équilibre de la population bactérienne du système digestif et au maintien général d'une bonne santé. On trouve ces organismes notamment dans le yogourt frais.

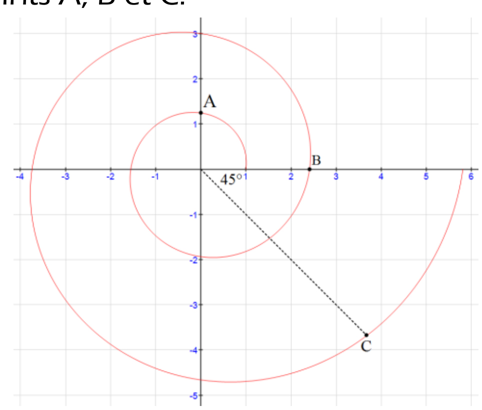
Combien de temps après le début du traitement antibiotique la population bactérienne sera-t-elle revenue à la normale?

10. Loi du refroidissement de Newton. Selon une loi de Newton, la différence entre la température d'un corps chaud et la température plus fraîche du milieu ambiant diminue exponentiellement. Pour déterminer le moment du décès d'une personne, par exemple, les policières et les policiers prennent la température du corps au moment de sa découverte, puis t min plus tard. Si T est la température du corps t min après sa découverte, alors $T - T_o = ae^{-kt}$, où T_0 est la température de l'air ambiant et a et k sont des constantes liées au corps qui refroidit.
a) À 1h30, on découvre un corps dans la cave d'une maison. La température de la cave est de 10° C et la tempréature du corps au moment de la découverte est de 32°C. Après 90 minutes, la trmpature du corps est de 28° C. Trouve les valeurs de a et de k.
b) Étant donné que la température normale du corps humain est de 37°C, la valeur T est de 37°C au moment du décès. À partir de tes résultats en a) détermine l'heure approximative du décès. Quelle suposition as-tu faite?

11. Dans le plan cartésien, il est possible de présenter les coordonnées d'un point d'une autre façon qu'avec les déplacements sur l'axe des abscisses et des ordonnées (x, y), appelées les coordonnées cartésiennes. Un mode de représentation est à l'aide de la distance à partir de l'origine, r, et de l'angle θ mesuré en position standard, en radians. Ce mode de représentation est appelé coordonnées polaires. Ainsi, les coordonnées polaires équivalentes aux coordonnées cartésiennes (1, 1) sont $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ tel qu'illustré dans la figure ci-contre.



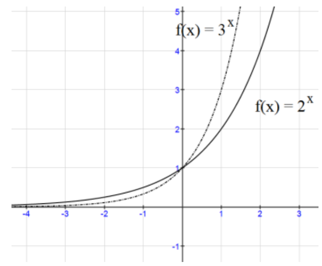
En coordonnées polaires, on peut construire une fonction nommée spirale logarithmique, dont la représentation graphique est ci-dessous. La règle de cette fonction est $r = e^{0,14\theta}$. Détermine les coordonnées polaires des points A, B et C.



3 Exploiter les relations mathématiques pour analyser des situations diverses, faire des prédictions et prendre des décisions éclairées.

3.2 Analyser diverses propriétés de fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie.

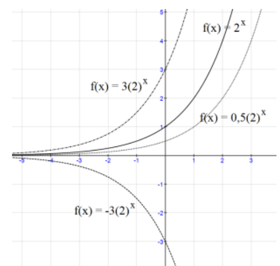
Rappel : La fonction exponentielle



Pour la fonction de la forme $f(x) = B^x$, on constate que lorsque B > 1, la fonction exponentielle est croissante tandis qu'elle est décroissante lorsque 0 < B < 1. Dans les deux cas, la fonction exponentielle s'approche d'une valeur limite, soit 0 dans les deux cas précédents. On appelle asymptote horizontale la droite vers laquelle la courbe de f(x) s'approche lorsque x tend vers ±∞.

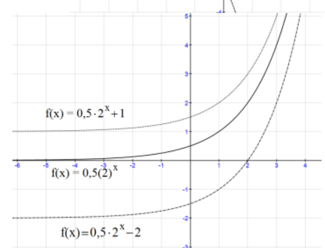
La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = B^x$ passe toujours par le point (0, 1).

Soit B > 1. Plus la valeur de B augmente, plus la croissance de la fonction est rapide.



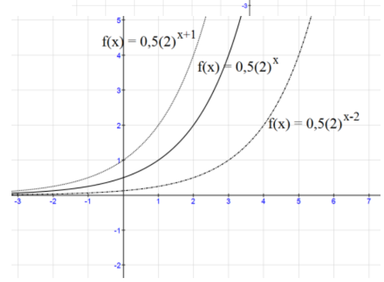
<u>Rôles du paramètre a</u>

La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = a\,B^x$ passe toujours par le point (0, a). Lorsque le paramètre a est négatif, la courbe subit une réflexion par rapport à l'axe des x.



<u>Rôles du paramètre k</u>

La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = a\,B^x + k$ passe toujours par le point (0, a+k). L'équation y = k est l'équation de l'asymptote de la fonction.



<u>Rôles du paramètre h</u>

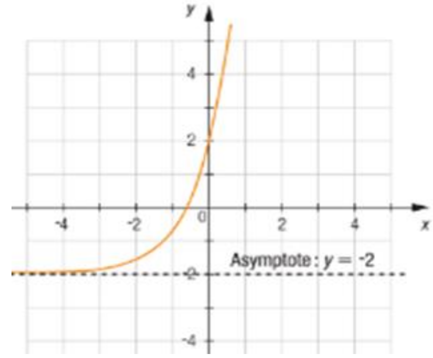
La courbe d'une fonction de la forme $f(x) = a\,B^{x-h} + k$ passe toujours par le point (h, a+k). Le graphique subit une translation horizontale.

Mathématiques 30411-C

Dans une fonction exponentielle, la coordonnée au point x = 0 sera (0, a + k) et une de ses extrémités se rapproche de l'asymptote y = k.

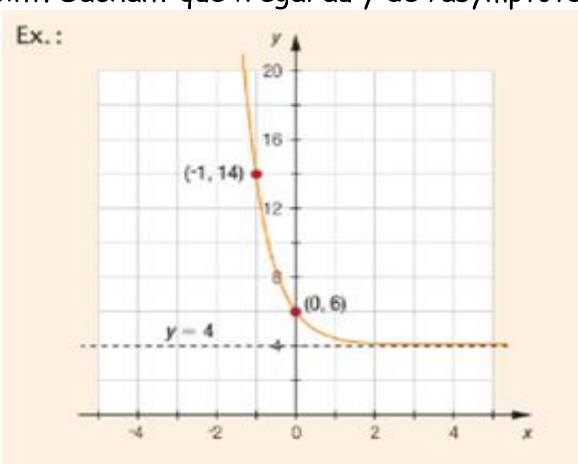
$f(x) = 4(3)^x - 2$

x	y
-3	$\frac{50}{27}$
-2	$-\frac{14}{9}$
-1	$-\frac{2}{3}$
0	2
1	10
2	34



Recherche de la règle $f(x) = ac^x + k$. Allo prof

Trouver l'équation de l'asymptote horizontale, l'ordonnée à l'origine de la courbe et les coordonnées d'un autre point. Sachant que k égal au y de l'asymptote et que l'ordonnée à l'origine est a + k.



L'équation de l'asymptote horizontale est $y = 4$, l'ordonnée à l'origine est 6 et la courbe passe par le point (-1, 14).

L'asymptote :

L'ordonnée à l'origine :

k =

a + k =

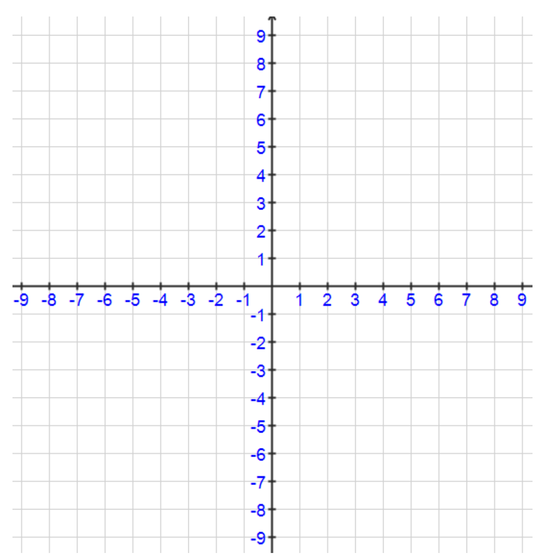
y = ac^x + k   et (-1, 14) donc

Exemple 1 : Soit $f(x) = -2\,(3)^{x+1} + 3$.

a) Représente graphiquement $f(x)$.

b) Représente graphiquement $f^{-1}(x)$.

c) Détermine l'expression de $f^{-1}(x)$.



Mathématiques 30411-C

La fonction logarithmique

La forme canonique de la fonction logarithmique est $f(x) = a\log_B(b(x-h)+k$

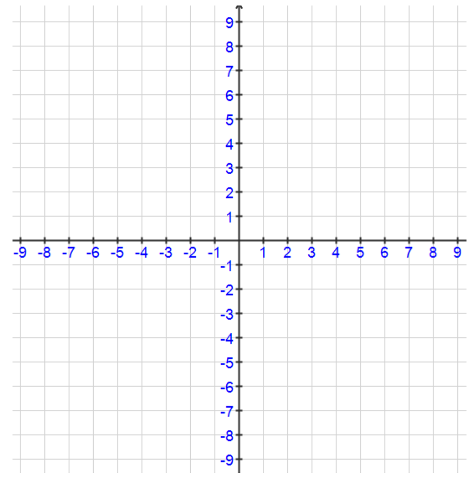
Cette courbe possède une asymptote verticale dont l'équation est x = h. l Pour la fonction de la forme $f(x) = \log_B x$, lorsque B > 1, la fonction est croissante tandis qu'elle est décroissante lorsque 0 < B < 1.

Puisque la fonction logarithmique est la réciproque de la fonction exponentielle, nous pouvons inverser les déplacements sur l'axe des x et des y. On a alors :

Δx	Δy
$^1/_B$	-1
1	0
B	1
B^2	2

Allo prof

Exemple 2 : Trace la courbe de $g(x) = -2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1$



$B = \frac{1}{2}, \searrow$

Asymptote verticale; $x = h$

$x = 2$

$a < 0$, sym / x, donc devient $\nearrow$

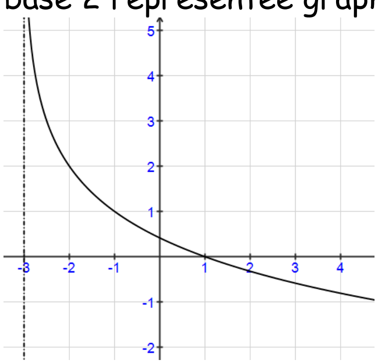
$b > 0, \rightarrow$

$0 = -2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1$

$g(3) = -2\log_{\frac{1}{2}}(3-2)+1 = 1$

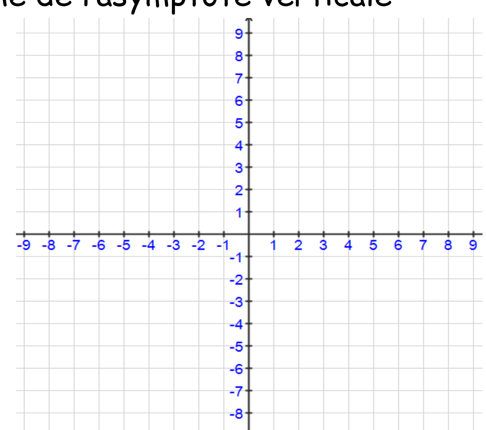
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = x - 2 \rightarrow x = 2,7$

Exemple 3 : Détermine l'équation de la fonction logarithmique à base 2 représentée graphiquement ci-dessous. Allo prof



Parcours C : Le paramètre b affecte le déplacement en x de la fonction. Lorsque le paramètre b est négatif, le graphique de la fonction se retrouve à la gauche de l'asymptote verticale grâce à une réflexion.

Exemple 4 : Trace la courbe de $g(x) = \log_3 -3(x+5) - 1$



Devoir : Parcours B : nos 1abcefg, 2ab, 3, 4, 5, 6a

Parcours C : nos 1bdefghi, 2bc, 3-6

Mathématiques 30411-C

Devoir

1. Représente graphiquement les fonctions et indique leur domaine de définition, leur image, leur variation (intervalle de croissance ou décroissance).

a) $f(x) = -2(3)^{x-2}$

b) $g(x) = \left(\frac{9}{4}\right)^{x+1} - 1$

c) $h(x) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 1$

d) $i(x) = 2 + \frac{1}{9}(3)^{4-x}$

e) $j(x) = e^{x} - 2$

f) $k(x) = -2\log(x+1) + 3$

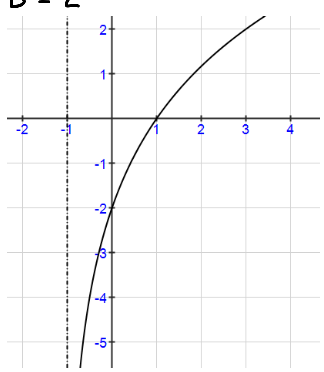
g) $l(x) = \ln(x) + 2$

h) $m(x) = -3\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - 2$

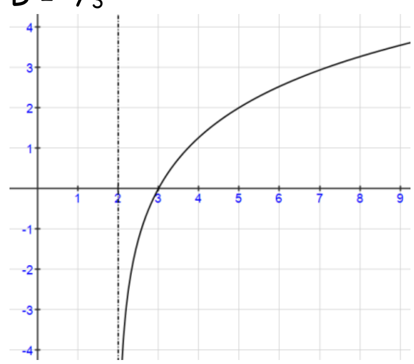
i) $n(x) = 2\ln(4-2x) + 3$

2. Détermine l'expression de chaque fonction logarithmique à base B représentée graphiquement.

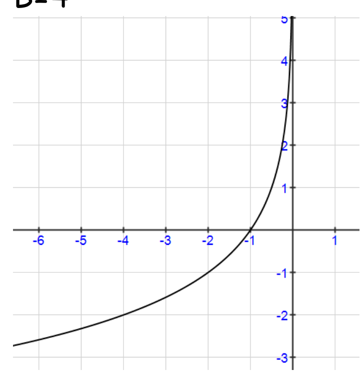
a) B = 2



b) B = $^{1}/_{3}$



c) B=4



3. Associe les fonctions exponentielles suivantes avec leur graphique.

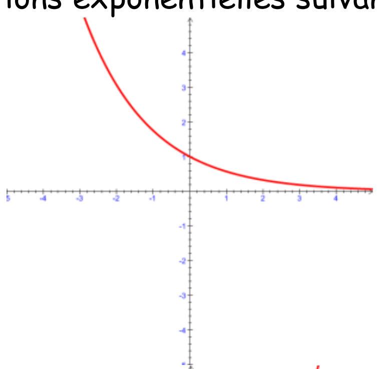
$y = \left(\frac{7}{4}\right)^{x}$

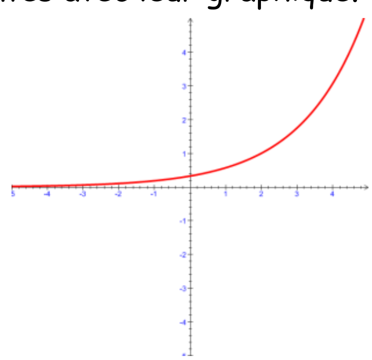
$y = \left(\frac{4}{7}\right)^{x}$

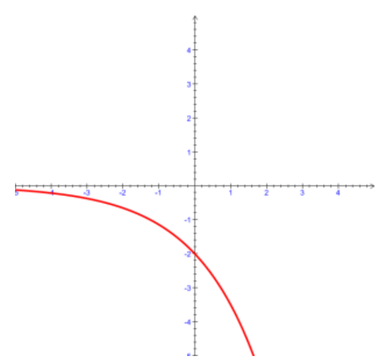
$y = -2\left(\frac{7}{4}\right)^{x}$

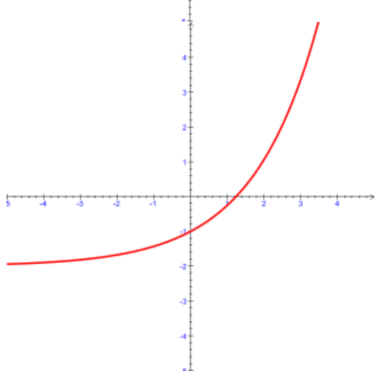
$y = \left(\frac{7}{4}\right)^{x} - 2$

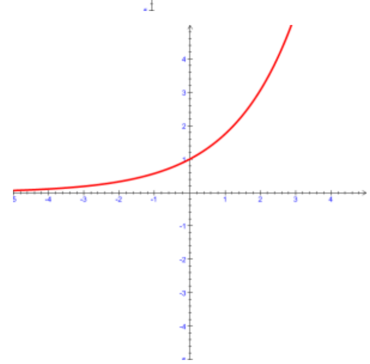
$y = \left(\frac{7}{4}\right)^{x-2}$











4. Selon une étude, chez les jeunes, la tension artérielle T, en millimètres de mercure (mmHg), dépend du volume V de l'artère radiale, en microlitres (µL), selon la fonction

$$V = 0,23 + 0,35\log\left(T - 56,1\right)$$

a) Selon cette étude, quelle est la tension artérielle minimale ?
b) Quel est le volume de l'artère lorsque la tension artérielle est de 110 mmHg?
c) Quelle est la tension artérielle mesuré lorsque le volume de l'artère radiale est de 0,7 µL?
d) Une augmentation de la tension artérielle se traduit-elle par une augmentation ou une diminution du volume de l'artère radiale ?
e) Isole T dans cette équation.

5. Selon Andrew Ehrenberg, la taille moyenne t des enfants de 5 à 13 ans, en cm, est reliée à leur masse, en kg, selon la règle $\log m = 0,008t + 0,4$

a) Trace le graphique de la taille en fonction de la masse.
b) Calcule la taille prédite par ce modèle pour un enfant de 60 kg.
c) Calcule la masse prédite par ce modèle pour un enfant de 1,5 m.

6. a) Écris la fonction $y = \ln\frac{1}{x}$ sous la forme $y = a\ln x$.

b) Écris la fonction $y = \log_8 x$ sous la forme $y = a\log_2 x$.

3.8 Analyser des situations se traduisant par des équations afin de résoudre des problèmes.
- résolution d'équations rationnelles

Exemple 1 : Résous les équations suivantes.

a) $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{18}{x^2-9}$

b) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{9}{x^2-x}$

Exemple 2 : Un camion qui transporte l'équipement d'un groupe rock va de Calgary à Spokane, soit une distance de 720 km. Pendant le trajet du retour, le camion augmente sa vitesse moyenne de 10 km/h. Si l'aller et le retour a duré 17 heures, quelle était la vitesse moyenne du camion de Calgary à Spokane ?

Devoir : Parcours C : Feuille de travail, nos 1abcdf, 2ad, 3, 4, 5, 6b, 7, 10, 11, 12, 13, 14

Mathématiques 30411-C

Feuille de travail

1. Résous

a) $\dfrac{2}{3x+2}=\dfrac{x}{x-1}$

b) $2+\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}$

c) $1+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x}{x-1}$

d) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{3}{x^2+3x}=\dfrac{1}{x}$

e) $\dfrac{1}{3x-1}+1=\dfrac{6}{3x^2-4x+1}$

f) $\dfrac{2}{x^2+5x+4}-1=\dfrac{1}{x+1}$

g) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x+1}{1-x}=-1$

2. En cas de panne de courant, un modèle informatique estime que la température T (en °C) du congélateur d'une usine de transformation des aliments d'une usine de transformation est définie par la fonction $T\left(t\right)=\dfrac{2t^2}{t+1}-15$ où t est le temps (en heures) écoulé depuis la panne de courant.

a) Détermine la température habituelle du congélateur.
b) Quelle est la température du congélateur 90 minutes après la panne de courant.
c) À quel moment le congélateur atteindra le point de congélation?
d) Une génératrice se met en marche quand la température atteint -5°C. En combien de temps cela se produit-il ?

3. Lorsque le cœur se contracte, la pression systolique P (en mmHg) change après t secondes selon la fonction $P\left(t\right)=\dfrac{25t^2+125}{t^2+1}\,;0\le t\le 10$. À quel moment la pression systolique est-elle le double celle après 5 secondes ?

4. On considère trois nombres $x, x+1, x+2$. L'inverse du plus petit nombre est égal à la somme des inverses des deux autres nombres. Quelles sont ce nombres ? (Rappel : L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$)

5. L'aire de la base d'un prisme à base rectangulaire est égale à son volume divisé par sa hauteur. Pour un certain prisme à base rectangulaire, le volume est représenté par l'expression $x^3+6x^2+11x+6$ et la hauteur, par l'expression $x+3$. Ce prisme a une aire de base de 12 unités carrées. Quel est son volume ?

6. Le temps que deux personnes mettent à effectuer une tâche ensemble correspond à $T = \frac{ab}{a+b}$ où a et b représentent le temps qu'il faut à chaque personne pour effectuer la même tâche seule.

a) Sarah peut préparer l'auditorium pour une assemblée en 30 minutes, mais quand José l'aide, ils terminent en 10 minutes. Combien de temps faut-il à José pour préparer l'auditorium seul ?

b) Jean-Paul et son tigre se sont trouvés du boulot. En effet, ils travaillent dans un entrepôt (hélas, le cirque n'a plus le même chiffre d'affaire qu'auparavant…). Étant beaucoup plus jeune, le tigre de Jean-Paul remplit un camion de livraison seul quatre fois plus rapidement que son maître. Ensembles, ils chargent un camion en 1 heure. Combien de temps faut-il à Jean-Paul pour charger seul un camion ?

7. Jean veut avoir une vitesse moyenne de 80 km/h. Pendant les deux premières heures de son trajet, il a seulement parcouru 120 km. Il augmente sa vitesse à 90 km/h. Pendant combien devra-t-il maintenir cette vitesse afin d'obtenir la vitesse moyenne espérée ?

8. Un avion parcourt les 4200 km qui séparent Glasgow de Halifax. Pendant le voyage de retour, un vent arrière augmente la vitesse de l'avion de 100 km/h. En tout, le vol aller-retour Glasgow-Halifax dure 13 h. Quelle est la vitesse de vol entre Glasgow et Halifax?

9. La distance en voiture qui sépare Winnipeg de Billings, au Manitoba, est de 1200 km. Un camion de déménagement a fait le trajet aller-retour en 31 heures, chargement et déchargement non compris. De Winnipeg à Billings, le camion avait une vitesse moyenne inférieure de 5 km/h à celle qu'il avait au retour. Quelle était sa vitesse moyenne entre Winnipeg et Billings?

10. Un bateau fait un trajet aller-retour d'une distance totale de 20 km sur une rivière dont le courant est de 5 km/h. Le trajet a pris 6 heures. Combien de temps ce bateau aurait-il pris s'il avait parcouru ces 20 km sur un lac en eau calme ?

11. Dans une boîte de noix mélangées de 250 g, les noix de cajou représentent 40 % de la masse. On verse les noix mélangées dans un bol et on y ajoute des noix de cajou jusqu'à ce que ces dernières représentent 60% de la masse. Quelle quantité de noix de cajou a-t-on ajouté?

12. Jason court à une vitesse qui est 4 km/h de plus que la vitesse de marche de Gérard. Après un certain temps, Jason a franchi 15 km et Gérard, 9 km. Pendant combien de temps se sont-ils déplacés?

13. Si Thierry avait marché 0,5 km/h plus vite, il lui aurait fallu une heure de moins pour faire sa randonnée de 15 km. À quelle vitesse Thierry marchait-il?

14. Un fabriquant prévoit un bénéfice B (en milliers de dollars) de la vente de x tonnes d'engrais en utilisant l'équation $B(x) = \dfrac{600x - 15000}{x + 100}$. Effectue les étapes suivantes :

i) Détermine combien de tonnes d'engrais doit être vendues pour que les bénéfices soient de 600 000$

ii) Trace un croquis de $B(x)$.

iii) Explique le résultat obtenu en i). Que représente un bénéfice de 600 000$ dans cette situation ?

Mathématiques 30411-C

3.8 Analyser des situations se traduisant par des équations afin de résoudre des problèmes.
- résolution d'équations racines carrées http://www.youtube.com/watch?v=13qU5N-juFA

Étapes :

1. Isoler une racine carrée
2. Élever les deux membres de l'équation au carré
3. Résoudre l'équation (s'il y a encore une racine carrée, refaire étapes 1 et 2)
4. Vérifier les solutions (OBLIGATOIRE!)

Exemple 1 : Résous

a) $x = \sqrt{x+10} + 2$

b) $\sqrt{4x+5} - \sqrt{2x-1} = 2$

Exemple 2 : Une fonction racine carrée de sommet (2, 4) passe par le point (1, 2). Sur quel intervalle cette fonction est-elle strictement positive?

Devoir : Pré-Calcul, pages 96-98, nos 3bd, 9b, 15, 16
Feuille de travail
Pré-Calcul page 98, no 17

Mathématiques 30411-C

Feuille de travail

1. Résous les équations suivantes.

a) $\sqrt{x+3} = 3\sqrt{x-1}$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+5} = 3$

c) $\sqrt{2-n} + 2 = 1 + \sqrt{3+n}$

d) $2\sqrt{x+1} + x = 1$

e) $\sqrt{k+1} + 5 = 2k$

f) $\sqrt{2-x} = \sqrt{2} - \sqrt{x}$

g) $x - 6\sqrt{x} = -8$

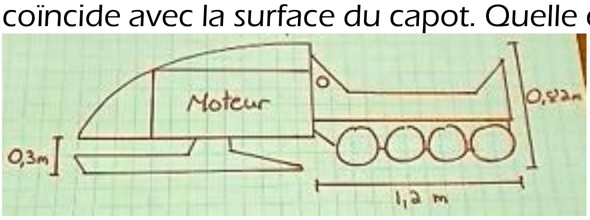
h) $\sqrt[3]{x+3} + 2 = -1$

i) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

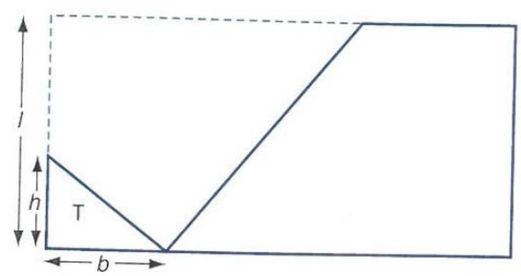
2. Soit le triangle PXY. Les points X(-6, 0) et Y(15, 0) sont deux des sommets. Le point P est situé sur l'axe des y de telle manière que la longueur de PY a 7 unités de plus que la longueur de PX. Quelle est l'aire du triangle PXY ?

3. Soit f, une fonction racine carrée. On a que $D_f = [-3, +\infty[$, $I_f =]-\infty, 8]$ et $f(1) = 7$.
Résous $f(x) = 5$.

4. Ci-dessous, on retrouve le croquis d'une motoneige. Le capot de la motoneige se modélise par une fonction racine carrée dont le sommet se situe à l'avant. À l'intérieur du capot, on retrouve un moteur qui est à 36 cm de l'avant et 24 cm de haut. Tel qu'indiqué dans le croquis, l'extrémité du moteur coïncide avec la surface du capot. Quelle est la longueur totale de la motoneige?



5. On plie une feuille de papier de telle manière que le coin supérieur gauche vient toucher un point sur le bord inférieur de la feuille. Le triangle formé est appelé T, la base du triangle est appelée b, la hauteur du triangle est appelée h et la largeur de la feuille est appelée l, comme dans l'illustration ci-dessous.



a) Écris une équation qui exprime b en fonction de l et h.

b) Écris une équation qui exprime l'aire, A, du triangle T en fonction de l et h.

c) Dans une certaine feuille, on a construit un triangle T dont l'aire est de 16 cm^2 et la hauteur $\frac{3}{8}$ de la largeur de la page. À quelle distance du coin inférieur droit doit-on plier la page afin de reproduire le triangle T?

Mathématiques 30411-C

3.2 Analyser des situations se traduisant par des fonctions et les utiliser afin de résoudre des problèmes avec et sans l'aide de la technologie.
- Fonctions à l'étude
  - sinus et cosinus : $y = a\sin b(x-h)+k$ et $y = a\cos b(x-h)+k$

Amorce des fonctions sinusoïdales :

Voici les liens Youtube pour les amorces:

http://youtu.be/7rSqiVb3DCg

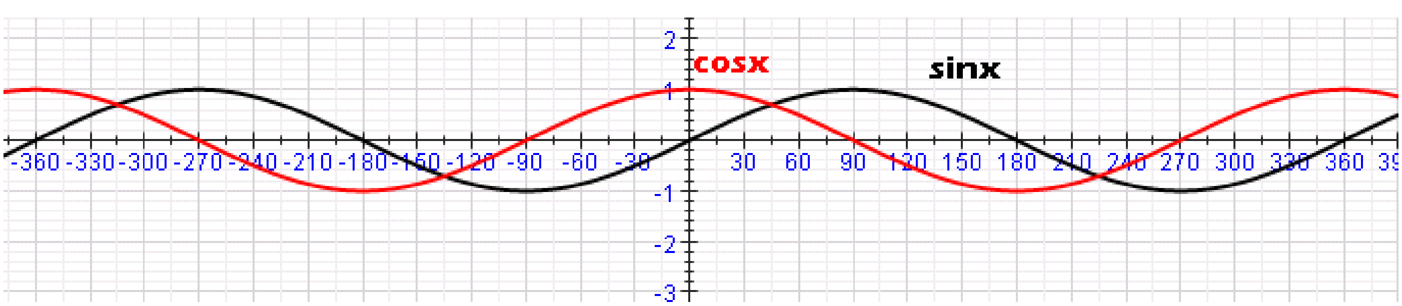
http://youtu.be/boNpDjOWShY

http://youtu.be/ZssJ4VH0V7U

si on remplie le tableau suivant avec des valeurs exactes :

X	$0°$ ou $0\,rd$	$30°$ ou $\frac{\pi}{6}\,rd$	$45°$ ou $\frac{\pi}{4}\,rd$	$60°$ ou $\frac{\pi}{3}\,rd$	$90°$ ou $\frac{\pi}{2}\,rd$	$120°$ ou $\frac{2\pi}{3}\,rd$	$135°$ ou $\frac{3\pi}{4}\,rd$	$150°$ ou $\frac{5\pi}{6}\,rd$	$180°$ ou $\pi\,rd$
Sin X									
Cos X									

X	$210°$ ou $\frac{7\pi}{6}\,rd$	$225°$ ou $\frac{5\pi}{4}\,rd$	$240°$ ou $\frac{4\pi}{3}\,rd$	$270°$ ou $\frac{3\pi}{2}\,rd$	$300°$ ou $\frac{5\pi}{3}\,rd$	$315°$ ou $\frac{7\pi}{4}\,rd$	$330°$ ou $\frac{11\pi}{6}\,rd$	$360°$ ou $2\pi\,rd$
Sin X								
Cos X								



1. Quelle est la valeur maximale de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$?

2. Quelles sont les abscisses à l'origine de la fonction $\sin\theta$?

Mathématiques 30411-C

Les fonctions qui se répètent sur un intervalle donné de leur domaine sont des fonctions périodiques.

L'intervalle que ça prend avant que le graphique se répète s'appelle la <u>période</u>.

L'<u>amplitude</u> d'une fonction périodique est égale à la moitié de la différence entre sa valeur maximale et sa valeur minimale.

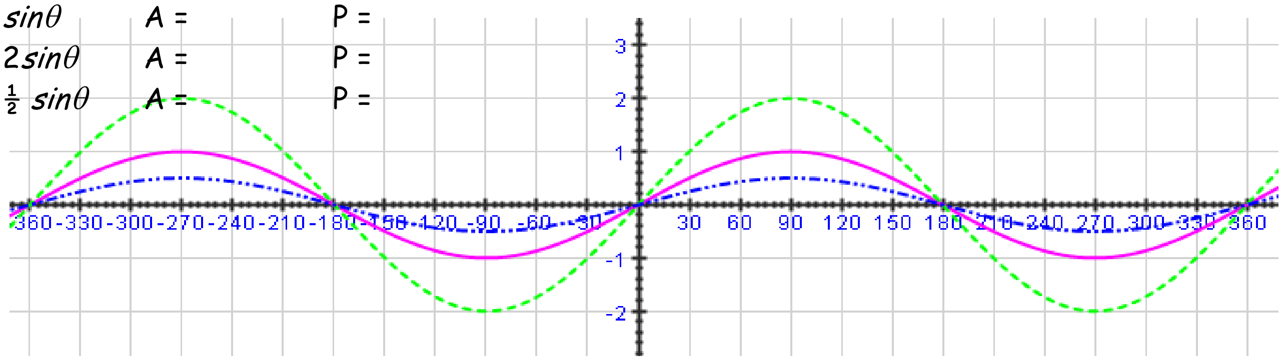
Pour les deux fonctions trigonométriques $y = \sin\theta$ et $y = \cos\theta$, l'amplitude de la fonction est 1 et leur période, 2π radians.

Si on examine les différents graphiques :

$y = \sin\theta$ ——— $y = 2\sin\theta$ - - - $y = \frac{1}{2}\sin\theta$ —··—

Indique l'amplitude et la période de chaque fonction?

$y = \sin\theta$ A = P =
$y = 2\sin\theta$ A = P =
$y = \frac{1}{2}\sin\theta$ A = P =

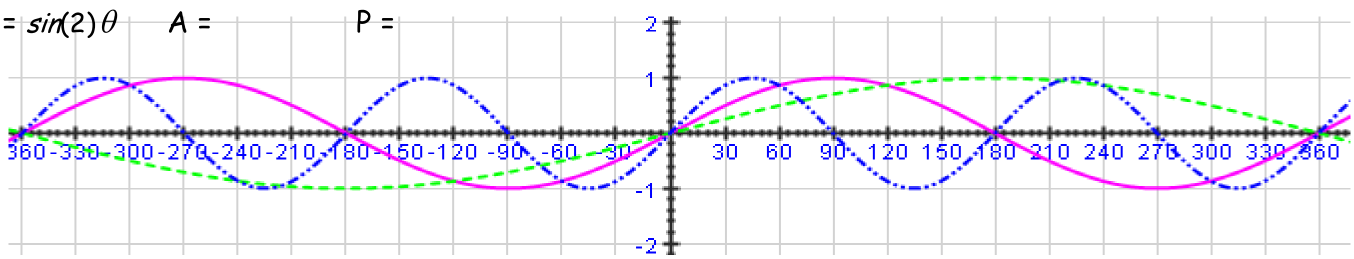


Si on examine les différents graphiques :

$y = \sin\theta$ ——— $y = \sin(\frac{1}{2}\theta)$ — — $y = \sin(2)\theta$ —··—

Indique l'amplitude et la période de chaque fonction?

$y = \sin\theta$ A = P =
$y = \sin(\frac{1}{2}\theta)$ A = P =
$y = \sin(2)\theta$ A = P =



Fonctions trigonométriques de la forme $y = a\sin b\theta$ **et** $y = a\cos b\theta$.

$$A = \frac{|max - min|}{2} = |a| \text{ et } P = \frac{360^\circ}{|b|} = \frac{2\pi}{|b|} ; \text{où } b \neq 0$$

Mathématiques 30411-C

Exemple 1 : Détermine l'amplitude et la période, en radians, de chaque fonction.

a) $y = -3\sin 4\theta$

b) $y = \dfrac{\cos\ -3\theta}{2}$

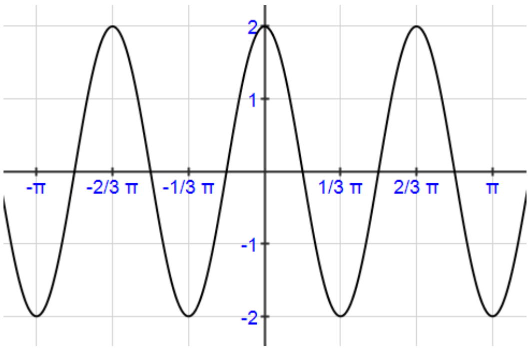
Exemple 2 : Écris une fonction trigonométrique qui répond aux critères suivants.

a) Fonction sinus dont la période est $\frac{8\pi}{3}$ dont l'amplitude est 2,5.

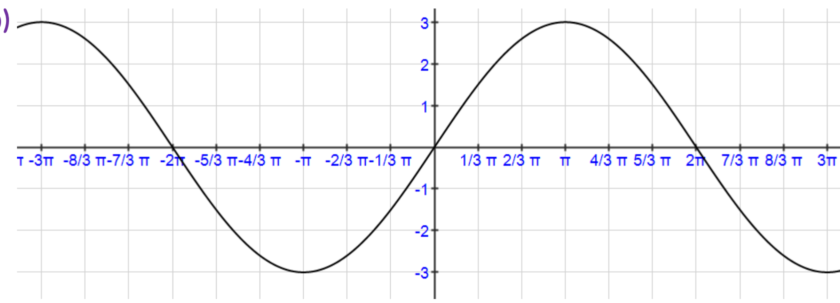
b) Fonction cosinus dont la période est 45° dont la valeur maximale est 4 et la valeur minimale est -4.

Exemple 3 : Détermine l'équation des fonctions sinusoïdales représentées ci-dessous.

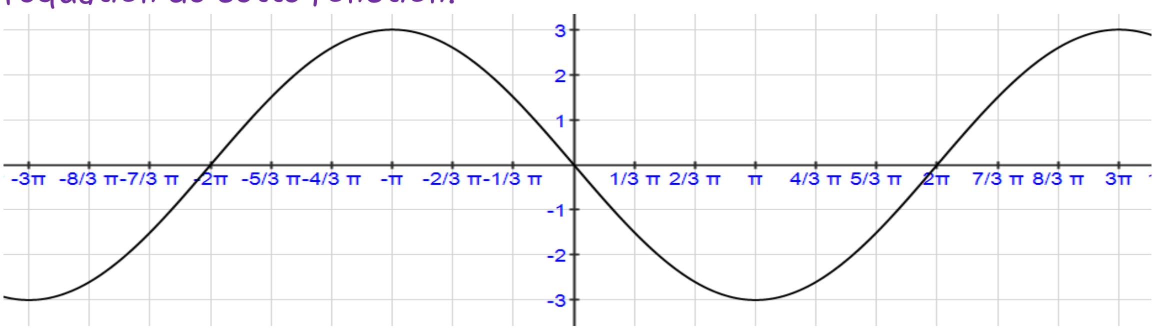
a)



b)



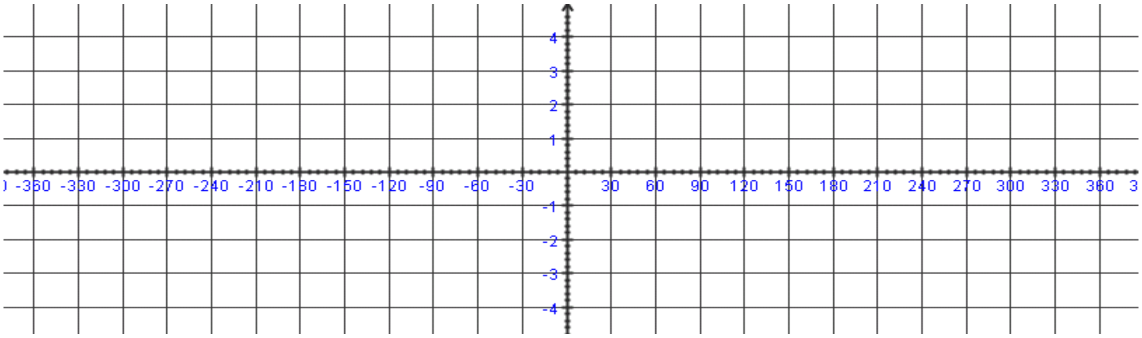
Exemple 4 : La fonction trigonométrique a été obtenue en faisant une réflexion de la fonction de l'exemple 3b) par rapport à l'axe des y. Quel paramètre a été modifié? Quelle est l'équation de cette fonction?



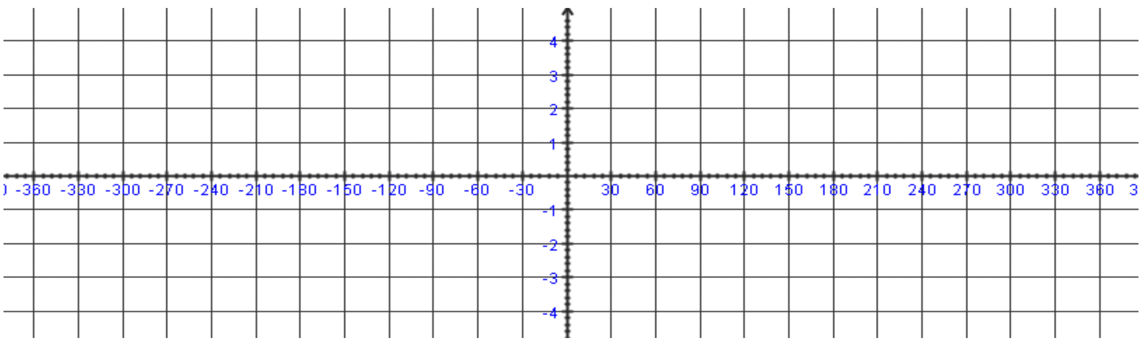
Devoir : Parcours B et C : Omnimaths 12, p. 209-210, nos 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44

Exemple 5 : Trace les fonctions trigonométriques suivantes.

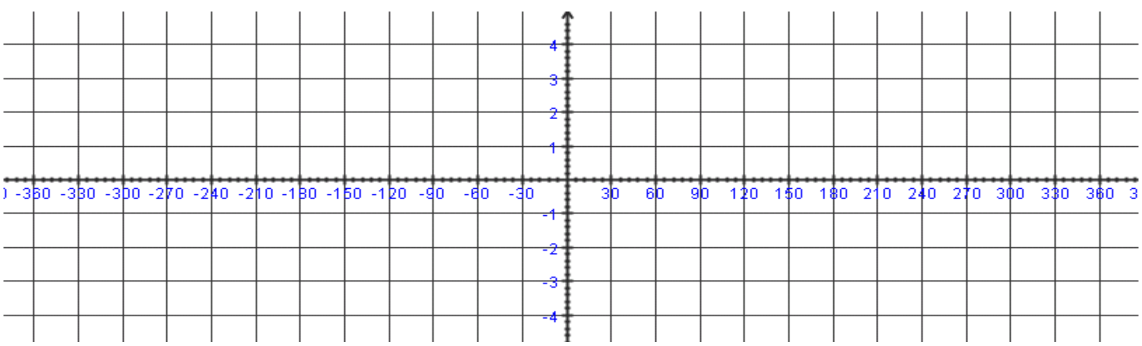
a) $y = 3\sin 2x$



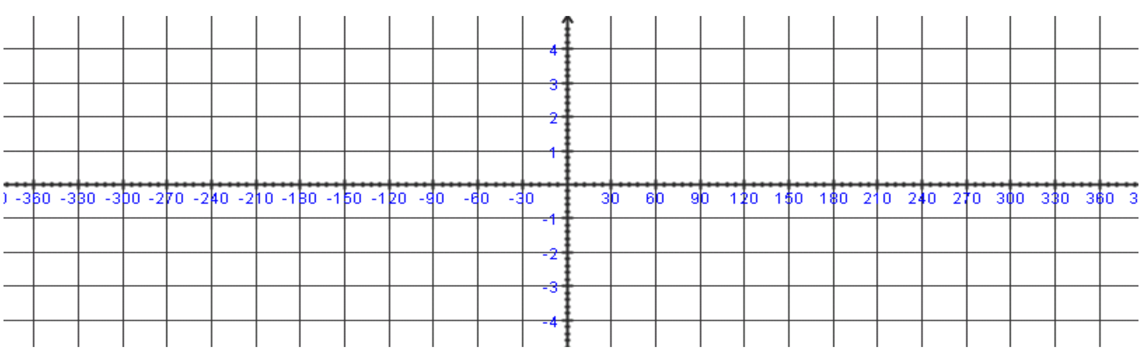
b) $y = -2\sin\dfrac{x}{2}$



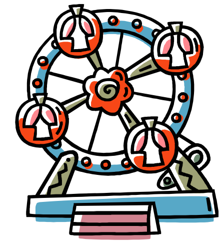
c) $y = 0,5\cos 4x$



d) $y = -2,5\cos 3x$



Exemple 6 : Une grande roue de 12 mètres de diamètre prend 6 minutes pour effectuer une rotation. Soient h(t), la hauteur de la grande roue par rapport au centre de la grande roue, et t, le temps écoulé, en minutes, depuis le début du tour de la grande roue. Sarah débute son tour de grande roue au bas de la roue. Quelle sera sa hauteur après 8 minutes?



Devoir : Parcours B : Feuille de travail nos 1-4 et Omnimaths 12, pages 210-211, nos 45, 54, 57ab, 60a
Parcours C : Feuille de travail nos 1-5 et Omnimaths 12, pages 210-211, nos 53, 54 ,56a, 57abc, 60a

Mathématiques 30411-C

Feuille de travail

1. Représente graphiquement les fonctions suivantes.

a) $y = 2\sin\frac{x}{3}$ b) $y = 2\cos 3x$ c) $y = -2\sin x$ d) $y = -\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{2}$

2. Une grande roue de 15 mètres de diamètre prend 8 minutes pour effectuer une rotation. Soient $h(t)$, la hauteur de la grande roue par rapport au centre de la grande roue, et t, le temps écoulé, en minutes, depuis le début du tour de la grande roue. Sarah débute son tour de grande roue à la hauteur médiane de la roue et elle est sur le point de descendre. Quelle sera sa hauteur après 11 minutes?

3. À marée haute, l'eau d'une mer est 1,2 mètre plus élevée qu'à marée basse. Il s'écoule 11 heures entre deux marées hautes. On considère $h(t)$, la hauteur de l'eau par rapport à sa valeur médiane t heures après la marée haute. Quelle est la règle de $h(t)$?

4. Le courant domestique est du courant alternatif de 110 V. La fréquence du courant est de 60Hz, ce qui signifie que le courant effectue 60 cycles par seconde. Quelle est la fonction sinus qui relie le voltage, $V(t)$, en volts, au temps, en secondes?

5. Soit f, une fonction sinusoïdale. La fonction f a pour valeur initiale 5, qui est aussi sa valeur maximale. La valeur minimale de f est -5. La fonction f intercepte l'axe des x pour la première fois à la droite de l'origine lorsque $x = \frac{2\pi}{5}$. Que vaut $f\left(\frac{7\pi}{9}\right)$ au centième près ?