

Isole x dans l'équation. Arrondis ta réponse au centième.

$$11. 21^{2x+5} = 278^{3x-7}$$

$$\log_{21} 278^{3x-7} = 2x + 5$$

$$(3x - 7) \log_{21} 278 = 2x + 5$$

$$1,84844(3x - 7) = 2x + 5$$

$$5,5453x - 12,9391 = 2x + 5$$

$$3,5453x = 17,9391$$

$$x = 5,06$$

$$13. 7 \times 2^x = 5^{x-2}$$

$$\log_5 (7 \times 2^x) = x - 2$$

$$\log_5 7 + \log_5 2^x = x - 2$$

$$1,2091 + x \log_5 2 = x - 2$$

$$0,4307x - x = -3,2091$$

$$-0,5693x = -3,2091$$

$$x = 5,64$$

$$14. 485 \times 5^{x+2} = 12^{2x-1}$$

$$\log_{12} (485 \times 5^{x+2}) = 2x - 1$$

$$\log_{12} 485 + \log_{12} 5^{x+2} = 2x - 1$$

$$2,4887 + (x + 2) \log_{12} 5 = 2x - 1$$

$$0,6477x + 1,2954 - 2x = -1 - 2,4887$$

$$-1,3523x = -4,7841$$

$$x = 3,54$$

Isole x dans l'équation.

$$22. \log_2 x = \log_2 18 - \log_2 6$$

$$\log_2 x = \log_2 3$$

$$x = 3$$

$$x = 3$$

$$\log_2 3 = \log_2 \frac{18}{6}$$

$$\log_2 3 = \log_2 3$$

$$\{3\}$$

$$24. \log x = 1 + \log 2$$

$$\log x - \log 2 = 1$$

$$\log \frac{x}{2} = 1$$

$$10^1 = \frac{x}{2}$$

$$x = 20$$

$$\log 20 - \log 2 = 1$$

$$\log \frac{20}{2} = 1$$

$$\log 10 = 1$$

$$1 = 1$$

$$\{20\}$$

$$25. 4 \log_5 x = \log_5 625$$

$$\log_5 x^4 = \log_5 625$$

$$x^4 = 625$$

$$x = 5 \text{ ou } x = -5$$

$$x = 5$$

$$4 \log_5 5 = \log_5 625$$

$$4 = 4$$

$$x = -5$$

$$4 \log_5 (-5) = \log_5 625$$

pas défini

$$\{5\}$$

Parcours B : Omnimaths 12, pages 113-115, nos 11, 13, 14, 22, 24, 25, 40abcdefgh, 42, 63; Feuille de travail, nos 1abcdg, 5, 6

40. Trouve les racines de chaque équation. N'oublie pas de vérifier les restrictions et de rejeter les racines inadmissibles.

a) $\log_2(x-2) + \log_2 x = \log_2 3$

$$\log_2(x-2)x = \log_2 3$$

$$x^2 - 2x = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -1$$

$$x = 3$$

$$\log_2(3-2) + \log_2 3 = \log_2 3$$

$$\log_2(1 \times 3) = \log_2 3$$

$$x = -1$$

$$\log_2(-1-2) + \log_2(-1) = \log_2 3$$

pas défini

$$\{3\}$$

b) $\log_2(x-2) + \log_2 x = 3$

$$\log_2 x(x-2) = 3$$

$$2^3 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x = 4 \text{ ou } x = -2$$

$$\{4\} \text{ à rejeter}$$

$$x = 4$$

$$\log_2(4-2) + \log_2 4 = 3$$

$$\log_2(2 \times 4) = 3$$

$$3 = 3$$

$$x = -2$$

$$\log_2(-2-2) + \log_2(-2) = 3$$

pas défini

$$\{4\}$$

c) $\log_5(3x+1) + \log_5(x-3) = 3$

$$\log_5(3x+1)(x-3) = 3$$

$$5^3 = 3x^2 - 9x + x - 3$$

$$0 = 3x^2 - 8x - 3 - 125$$

$$0 = 3x^2 - 8x - 128$$

$$0 = 3x^2 - 24x + 16x - 128$$

$$3x(x-8) + 16(x-8) = 0$$

$$(x-8)(3x+16) = 0$$

$$x = 8 \quad x = -\frac{16}{3}$$

$$x = 8$$

$$\log_5(3(8)+1) + \log_5(8-3) = 3$$

$$\log_5(25 \times 5) = 3$$

$$\log_5 125 = 3$$

$$3 = 3$$

$$x = -\frac{16}{3}$$

$$\log_5\left(3\left(-\frac{16}{3}\right)+1\right) + \log_5\left(-\frac{16}{3}-3\right) = 3$$

pas défini

$$\{8\}$$

$$d) \log_q(x-5) = 1 - \log_q(x+3)$$

$$\log_q(x-5) + \log_q(x+3) = 1$$

$$\log_q(x-5)(x+3) = 1$$

$$q^1 = x^2 + 3x - 5x - 15$$

$$0 = x^2 - 2x - 24$$

$$0 = (x-6)(x+4)$$

$$x = 6 \text{ ou } x = -4$$

$$x = 6$$

$$\log_q(6-5) = 1 - \log_q(6+3)$$

$$\log_q 1 = 1 - \log_q 9$$

$$0 = 1 - 1$$

$$0 = 0$$

$$x = -4$$

$$\log_q(-4-5) = 1 - \log_q(-4+3)$$

pas défini

$$\{6\}$$

$$e) \log_2(x^2 + 8) - \log_2 6 = \log_2 x$$

$$\log_2 \frac{x^2 + 8}{6} = \log_2 x$$

$$\frac{x^2 + 8}{6} = x$$

$$x^2 + 8 = 6x$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = 4$$

$$x = 2$$

$$\log_2(2^2 + 8) - \log_2 6 = \log_2 2$$

$$\log_2 \frac{12}{6} = 1$$

$$\log_2 2 = 1$$

$$1 = 1$$

$$x = 4$$

$$\log_2(4^2 + 8) - \log_2 6 = \log_2 4$$

$$\log_2 \frac{24}{6} = 2$$

$$\log_2 4 = 2$$

$$2 = 2$$

$$\{2, 4\}$$

$$f) \log(2x+1) = 1 + \log(x-2)$$

$$\log(2x+1) - \log(x-2) = 1$$

$$\log \frac{2x+1}{x-2} = 1$$

$$10^1 = \frac{2x+1}{x-2}$$

$$10x - 20 = 2x + 1$$

$$8x = 21$$

$$x = \frac{21}{8}$$

$$x = \frac{21}{8}$$

$$\log \left(2 \left(\frac{21}{8} \right) + 1 \right) = 1 + \log \left(\frac{21}{8} - 2 \right)$$

$$0,79588 = 1 - 0,20412$$

$$0,79588 = 0,79588$$

$$\left\{ \frac{21}{8} \right\}$$

$$g) \log_3(x-2) + \log_3 10 - \log_3(x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{(x-2)10}{x^2 + 3x - 10} &= 0 \\ 3^0 &= \frac{(x-2)10}{x^2 + 3x - 10} \\ 1 &= \frac{(x-2)10}{x^2 + 3x - 10} \\ x^2 + 3x - 10 &= 10x - 20 \\ x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ (x-5)(x-2) &= 0 \\ x = 5 \quad x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 5 \\ \log_3(5-2) + \log_3 10 - \log_3(5^2 + 3(5) - 10) &= 0 \\ \log_3 \frac{(3)(10)}{30} &= 0 \\ \log_3 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x = 2 \\ \log_3(2-2) + \log_3 10 - \log_3(2^2 + 3(2) - 10) &= 0 \\ \text{pas défini} \\ \{5\} \end{aligned}$$

$$h) (\log_3 x)^2 = \log_3 x^2 + 3$$

$$\begin{aligned} (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 3 &= 0 \\ (\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 3 &= 0 \\ (\log_3 x - 3)(\log_3 x + 1) &= 0 \\ \log_3 x = 3 \text{ ou } \log_3 x = -1 \\ 3^3 = x \quad 3^{-1} = x \\ x = 27 \quad x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 27 \\ (\log_3 27)^2 = \log_3 27^2 + 3 \\ 3^2 = 2(3) + 3 \\ 9 = 6 + 3 \\ 9 = 9 \\ x = \frac{1}{3} \\ \left(\log_3 \frac{1}{3}\right)^2 = \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \\ (-1)^2 = 2(-1) + 3 \\ 1 = 1 \\ \left\{\frac{1}{3}, 27\right\} \end{aligned}$$

42. Intérêt. Combien de temps faut-il, au mois près, pour qu'un placement de 12500\$ atteigne 20000\$ s'il produit 10% d'intérêt composé mensuellement?

$$\begin{aligned} M &= C(1,0083)^{\frac{12t}{1}} \\ 20000 &= 12500(1,0083)^{12t} \\ 1,6 &= (1,0083)^{12t} \\ \log 1,6 &= \log(1,0083)^{12t} \\ \log 1,6 &= 12t \log(1,0083) \\ 56,86 &= 12t \\ t &= 4,7383 \text{ans} = 57 \text{mois} \end{aligned}$$

Il faudrait 57 mois.

63. Trouve la valeur de x.

$$\log_4(x+1) + \log_4 x = 2$$

$$\log_4(x+1)x = 2$$

$$4^2 = x^2 + x$$

$$0 = x^2 + x - 16$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{65}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{65}}{2}$$

$$\left\{ \frac{-1 + \sqrt{65}}{2} \right\}$$

$$x = 3,53$$

$$\log_4(3,53 + 1) + \log_4 3,53 = 2$$

$$2 = 2$$

$$x = -4,53$$

$$\log_4(-4,53 + 1) + \log_4(-4,53) = 2$$

pas défini

$$\left\{ \frac{-1 + \sqrt{65}}{2} \right\}$$

Feuille de travail

1. Résous.

a) $\log_x(x+1) = 2$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \quad \text{à rejeter}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\log_{1,62}(1,62 + 1) = 2$$

$$2 = 2$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\log_{-0,62}(-0,62 + 1) = 2$$

pas défini

$$\left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

b) $\log(\ln x) = -1$

$$10^{-1} = \ln x$$

$$\frac{1}{10} = \ln x$$

$$e^{\frac{1}{10}} = x$$

$$x = 1,1052$$

$$\{1,1052\}$$

$$x = 1,1052$$

$$\log(\ln 1,1052) = -1$$

$$\log 0,1 = -1$$

$$-1 = -1$$

$$\{1,1052\}$$

$$c) \log_3(\log_x 125) = 1$$

$$3^1 = \log_x 125$$

$$x^3 = 125$$

$$x = 5$$

$$x = 5$$

$$\log_3(\log_5 125) = 1$$

$$\log_3 3 = 1$$

$$1 = 1$$

$$\{5\}$$

$$d) \log_4(x+3) + \log_4(2-x) = 1$$

$$\log_4(x+3)(2-x) = 1$$

$$4^1 = -x^2 - 3x + 2x + 6$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2 \text{ ou } x = 1$$

$$\{1, -2\}$$

$$x = -2$$

$$\log_4(-2+3) + \log_4(2-(-2)) = 1$$

$$\log_4 1 + \log_4 4 = 1$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 = 1$$

$$x = 1$$

$$\log_4(1+3) + \log_4(2-1) = 1$$

$$\log_4 4 + \log_4 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 = 1$$

$$\{-2, 1\}$$

$$e) \frac{2}{3} = \log \sqrt[3]{w(w-10)}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \log w(w-10)$$

$$2 = \log w(w-10)$$

$$10^2 = w^2 - 10w$$

$$0 = w^2 - 10w - 100$$

$$w = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(1)(-100)}}{2}$$

$$w = \frac{10 \pm \sqrt{500}}{2} = \frac{10 \pm 10\sqrt{5}}{2}$$

$$w = 5 \pm 5\sqrt{5}$$

$$w = 5 + 5\sqrt{5}$$

$$\frac{2}{3} = \log \sqrt[3]{16,18(16,18-10)}$$

$$0,67 = 0,67$$

$$w = 5 - 5\sqrt{5}$$

$$\frac{2}{3} = \log \sqrt[3]{-6,18(-6,18-10)}$$

$$0,67 \neq 4,64$$

$$\{5 + 5\sqrt{5}\}$$

$$f) \log_{12}(x^3 + 8) - \log_{12}(x + 2) = 1$$

$$\log_{12} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = 1$$

$$12^1 = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2}$$

$$x^2 - 2x + 4 - 12 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = 4 \text{ ou } x = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ & & 2 & -4 & 8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & \end{array}$$

$$x = 4$$

$$\log_{12}(4^3 + 8) - \log_{12}(4 + 2) = 1$$

$$\log_{12} \frac{72}{6} = 1$$

$$12 = 12$$

$$w = -2$$

$$\log_{12}((-2)^3 + 8) - \log_{12}((-2) + 2) = 1$$

$$\log_{12} \frac{16}{0} = 1$$

pas défini

$$\{4\}$$

$$g) (\ln x)^2 + \ln x^2 = 3$$

$$(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 = 0$$

$$(\ln x + 3)(\ln x - 1) = 0$$

$$\ln x = -3 \text{ ou } \ln x = 1$$

$$e^{-3} = x \quad e^1 = x$$

$$x = e^{-3}$$

$$(\ln e^{-3})^2 + \ln(e^{-3})^2 = 3$$

$$(-3)^2 + \ln e^{-6} = 3$$

$$9 - 6 = 3$$

$$3 = 3$$

$$x = e$$

$$(\ln e)^2 + \ln(e)^2 = 3$$

$$1 + 2 = 3$$

$$3 = 3$$

$$\{e^{-3}, e\}$$

$$h) 7^{x+1} = \log_8 55$$

$$7^{x+1} = 1,927$$

$$\log_7 1,927 = x + 1$$

$$0,34 - 1 = x$$

$$x = -0,66$$

$$x = -0,66$$

$$7^{-0,66+1} = \log_8 55$$

$$1,927 = 1,927$$

$$\{-0,66\}$$

i) $\ln x - 2 \ln(x - 4) = -\ln 2$

$$\ln \frac{x}{(x-4)^2} = \ln \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{(x-4)^2} = \frac{1}{2}$$

$$2x = x^2 - 8x + 16$$

$$0 = x^2 - 10x + 16$$

$$0 = (x-8)(x-2)$$

$$x = 8 \text{ ou } x = 2$$

$$x = 8$$

$$\ln 8 - 2 \ln(8-4) = -\ln 2$$

$$-0,693 = -0,693$$

$$x = 2$$

$$\ln 2 - 2 \ln(2-4) = -\ln 2$$

$$\ln 2 - 2 \ln(-2) = -\ln 2$$

pas défini

$$\{8\}$$

2. En sachant que $\log_a b^2 = 3$ que vaut $\log_b a^2$?

$$\log_a b^2 = 3$$

$$a^3 = b^2$$

$$a = (b^2)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_b a^2 = \log_b \left(b^{\frac{2}{3}} \right)^2 = \log_b b^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

3. En sachant que $2^b = 3$ et que $2^a = 5$, quelle est l'expression équivalente à $\log_3 10$?

a) $\frac{b+1}{a}$

b) $\frac{b+1}{a+1}$

c) $\frac{a+1}{b}$

d) $\frac{a}{b}$

e) $\frac{b}{a}$

$$2^b = 3$$

$$\log_3 2^b = 1$$

$$b \log_3 2 = 1$$

$$\log_3 2 = \frac{1}{b}$$

$$2^a = 5$$

$$\log_2 5 = a$$

$$\frac{\log_3 5}{\log_3 2} = a$$

$$\log_3 5 = a \log_3 2$$

$$\log_3 5 = a \left(\frac{1}{b} \right) = \frac{a}{b}$$

$$\log_3 5 = a \left(\frac{1}{b} \right) = \frac{a}{b}$$

$$\log_3 10 = \log_3 (2 \times 5)$$

$$= \log_3 2 + \log_3 5$$

$$= \frac{1}{b} + \frac{a}{b} = \frac{a+1}{b}$$

4. Montre que si $\log_b a = c$ et $\log_y b = c$, alors $\log_a y = c^{-2}$

$$\log_b a = c$$

$$\frac{\log a}{\log b} = c$$

$$\frac{\log a}{c} = \log b$$

$$\log_y b = c$$

$$\frac{\log b}{\log y} = c$$

$$\log b = c \log y$$

$$\frac{\log a}{c} = c \log y$$

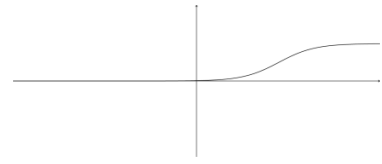
$$\log a = c^2 \log y$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\log y}{\log a}$$

$$c^{-2} = \log_a y$$

Parcours B : Omnimaths 12, pages 113-115, nos 11, 13, 14, 22, 24, 25, 40abcdefgh, 42, 63; Feuille de travail, nos 1abcdg, 5, 6

Le modèle exponentiel classique ne peut pas modéliser plusieurs situations en raison de sa croissance exponentielle. Pour les situations ayant une valeur maximale, on peut avoir recours à un autre modèle exponentiel : la fonction logistique. Ce genre de fonction s'approche d'une valeur maximale, tel que présenté dans le graphique suivant. L'exercice suivant est une application de la fonction logistique.



5. Soit $f(t) = \frac{100}{1 + 99e^{-0,26t}}$. On suppose que $f(t)$ donne le pourcentage de foyers français

équipés d'un téléviseur, entre 1954 et 1994, t étant le rang de l'année à partir de 1954.

a) Quel était le pourcentage de foyers français équipés d'un téléviseur en 1979?

$$f(25) = \frac{100}{1 + 99e^{-0,26(25)}}$$

$$f(25) = 87\%$$

b) En quelle année avait-on 75% des foyers français équipés d'un téléviseur?

$$75 = \frac{100}{1 + 99e^{-0,26t}}$$

$$75(1 + 99e^{-0,26t}) = 100$$

$$1 + 99e^{-0,26t} = 1,3333$$

$$99e^{-0,26t} = 0,3333$$

$$e^{-0,26t} = 0,00337$$

$$\ln 0,00337 = -0,26t$$

$$t = 21,9$$

donc en 1976

6. La règle $E = P \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{i}$ permet de calculer le nombre n de paiements de P \$ à un taux i

d'intérêt mensuel nécessaires pour rembourser un emprunt initial de E \$. On effectue un emprunt de 200 000\$ à un taux d'intérêt annuel de 6% et on le rembourse à l'aide de paiements mensuels de 1 200\$. En combien de temps aura-t-on remboursé cet emprunt?

$$200000 = (1200) \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{0,06}{12}}\right)^n}{\frac{0,06}{12}}$$

$$166,667 \times \frac{0,06}{12} = 1 - (0,995)^n$$

$$-0,1667 = -(0,995)^n$$

$$\log_{0,995} 0,1667 = n$$

$$n = 357,42$$

$$\frac{357,42}{12} = 29,8 \text{ En 30 ans.}$$