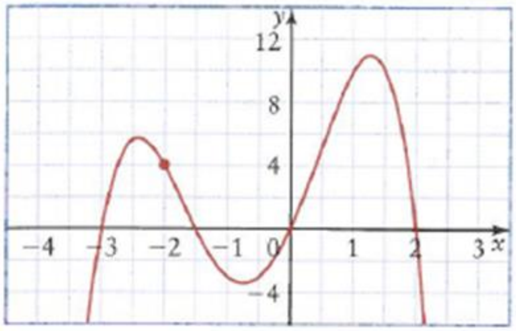
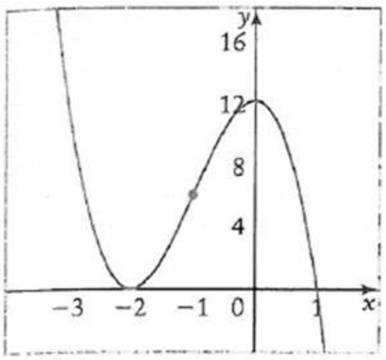
Feuille de travail

1. Détermine l'équation de la fonction quartique suivante.



$$y = a(x+3)(2x+3)(x)(x-2)$$
$$4 = a(-2+3)(2(-2)+3)(-2)(-2-2)$$
$$4 = -8a$$
$$a = \frac{-1}{2}$$
$$y = \frac{-1}{2}(x+3)(2x+3)(x)(x-2)$$

2. Détermine l'équation de la fonction définie par ce graphique.



$$y = a(x+2)^2(x-1)$$
$$6 = a(-1+2)^2(-1-1)$$
$$6 = -2a$$
$$a = -3$$
$$y = -3(x+2)^2(x-1)$$

3. Résous les inéquations suivantes par factorisation.

a) $12x^2 + 25x - 7 \geq 0$

$$(12x-3)(12x+28)/12 \geq 0$$
$$3(4x-1)4(3x+7)/12 \geq 0$$
$$(4x-1)(3x+7) \geq 0$$

Solution : $\left]-\infty, \frac{-7}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$

	$-\infty$	$\frac{-7}{3}$		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$(4x-1)$	-	-	-	0	+
$(3x+7)$	-	0	+	+	+
$(4x-1)(3x+7)$	+	0	-	0	+

b) $6x^3 + 13x^2 - 41x + 12 \leq 0$

$$6(-4)^3 + 13(-4)^2 - 41(-4) + 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 6 & 13 & -41 & 12 \\ & \downarrow & -24 & 44 & -12 \\ \hline & 6 & -11 & 3 & 0 \end{array}$$

$$(x+4)(6x^2 - 11x + 3) \leq 0$$
$$(x+4)(6x-9)(6x-2)/6 \leq 0$$
$$(x+4)3(2x-3)2(3x-1)/6 \leq 0$$
$$(x+4)(2x-3)(3x-1) \leq 0$$

	$-\infty$	-4		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$(x+4)$	-	0	+	+	+	+	+
$(2x-3)$	-	-	-	-	-	0	+
$(3x-1)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x+4)(2x-3)(3x-1)$	-	0	+	0	-	0	+

$\left]-\infty, -4\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$

Feuille de travail

c) $5x^4 + 10x^2 - 15 < 0$

$5(x^4 + 2x^2 - 3) < 0$

$5(x^2 + 3)(x^2 - 1) < 0$

$5(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1) < 0$

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$(x^2 + 3)$	+	+	+	+	+
$(x - 1)$	–	–	–	0	+
$(x + 1)$	–	0	+	+	+
$5(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$	+	0	–	0	+

$]-1, 1[$

4. Résous chacune des inéquations suivantes :

a) $x^2 + 4x - 5 \le 0$

$(x + 5)(x - 1) \le 0$

	$-\infty$	-5		1	$+\infty$
$(x + 5)$	–	0	+	+	+
$(x - 1)$	–	–	–	0	+
$(x + 5)(x - 1)$	+	0	–	0	+

$[-5, 1]$

b) $-2x^3 + x^2 + 13x + 6 < 0$

$-2(-2)^3 + (-2)^2 + 13(-2) + 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -2 & 1 & 13 & 6 \\ & \downarrow & -4 & 10 & 6 \\ \hline & -2 & 5 & 3 & 0 \end{array}$$

$-(x + 2)(2x^2 - 5x - 3) < 0$

$-(x + 2)(2x - 6)(2x + 1) / 2 < 0$

$-(x + 2)(x - 3)(2x + 1) < 0$

	$-\infty$	-2		$\frac{-1}{2}$		3	$+\infty$
$-(x + 2)$	+	0	–	–	–	–	–
$(x - 3)$	–	–	–	–	–	0	+
$(2x + 1)$	–	–	–	0	+	+	+
$-(x + 2)(x - 3)(2x + 1)$	+	0	–	0	+	0	–

$\left]-2, \frac{-1}{2}\right[\cup]3, \infty[$

c) $2x^3 + x^2 - 2x - 1 > 0$

$2(1)^3 + (1)^2 - 2(1) - 1 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ & \downarrow & -2 & -3 & -1 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$(x - 1)(2x^2 + 3x + 1) > 0$

$(x - 1)(2x + 2)(2x + 1) / 2 > 0$

$(x - 1)(x + 1)(2x + 1) > 0$

	$-\infty$	-1		$\frac{-1}{2}$		1	$+\infty$
$(x - 1)$	–	–	–	–	–	0	+
$(x + 1)$	–	0	+	+	+	+	+
$(2x + 1)$	–	–	–	0	+	+	+
$(x - 1)(2x + 2)(2x + 1)$	–	0	+	0	–	0	+

$\left]-1, \frac{-1}{2}\right[\cup]1, \infty[$

d) $x^3 - 5x + 4 \ge 0$

$(1)^3 - 5(1) + 4 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -5 & 4 \\ & \downarrow & -1 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$(x-1)(x^2+x-4) \ge 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-4)}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$$

	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$		-1		$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
$(x+1)$	−	−	−	0	+	+	+
$\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$	−	0	+	+	+	+	+
$\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$	−	−	−	−	−	0	+
$(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$	−	0	+	0	−	0	+

$$\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, -1\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \infty\right[$$

5. Résous.

a) $9x^2 - 16 < 0$

$(3x-4)(3x+4) < 0$

	$-\infty$	$\frac{-4}{3}$		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$(3x-4)$	−	−	−	0	+
$(3x+4)$	−	0	+	+	+
$(3x-4)(3x+4) < 0$	+	0	−	0	+

$$\left]-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right[$$

b) $-x^3 + 6x^2 - 9x > 0$

$-x(x^2 - 6x + 9) > 0$

$-x(x-3)(x-3) > 0$

	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$-x$	−	−	−	0	+	+	+
$(x-3)$	−	−	−	−	−	0	+
$(x-3)$	−	−	−	−	−	0	+
$-x(x-3)(x+3)$	−	−	−	0	+	0	+

$$]0,3[\cup]3,\infty[$$

Feuille de travail

c) $2x^3 + 5x^2 - 18x - 45 \le 0$

$2(3)^3 + 5(3)^2 - 18(3) - 45 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & 5 & -18 & -45 \\ & \downarrow & -6 & -3 & -45 \\ \hline & 2 & 1 & -15 & 0 \end{array}$$

$$(x-3)(2x^2 + x - 15) \le 0$$
$$(x-3)(2x+6)(2x-5)/2 \le 0$$
$$(x-3)(x+3)(2x-5) \le 0$$

	$-\infty$	-3		$\frac{5}{2}$		3	$+\infty$
$(x-3)$	−	−	−	−	−	0	+
$(x+3)$	−	0	+	+	+	+	+
$(2x-5)$	−	−	−	0	+	+	+
$(x-3)(x+3)(2x-5)$	−	0	+	0	−	0	+

$$]-\infty, -3] \cup \left[\frac{5}{2}, 3\right]$$

d) $2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 17x - 6 \ge 0$

$2(-1)^4 + 5(-1)^3 - 8(-1)^2 - 17(-1) - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 5 & -8 & -17 & -6 \\ & & 2 & 3 & -11 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & -11 & -6 & \end{array}$$

$$(x+1)(2x^3 + 3x^2 - 11x - 6) \ge 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 3 & -11 & -6 \\ & \downarrow & -4 & -14 & -6 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-2)(2x^2 + 7x + 3) \ge 0$$
$$(x+1)(x-2)(2x+6)(2x+1)/2 \ge 0$$
$$(x+1)(x-2)(x+3)(2x+1) \ge 0$$

	$-\infty$	-3		-1		$\frac{-1}{2}$		2	$+\infty$
$(x+1)$	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$(x-2)$	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$(x+3)$	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$(2x+1)$	−	−	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+

$$]-\infty, -3] \cup \left[-1, \frac{-1}{2}\right] \cup [2, \infty[$$

6. a) Détermine une équation, sous forme simplifiée, de la famille de fonctions quartiques dont les zéros sont 5 (d'ordre 2) et $-2 \pm \sqrt{6}$.

$$a(x-5)(x-5)(x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6}) = y$$
$$a\,a(x-5)(x-5)(x^2 + 2x - x\sqrt{6} + 2x + 4 - 2\sqrt{6} + x\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 6) = y$$
$$a(x-5)^2(x^2 + 4x - 2) = y$$

b) Détermine l'équation de la fonction de la famille dont la représentation graphique a 20 comme ordonnée à l'origine.

$$(0,20)$$

$$a(0-5)^2\left(0^2+4(0)-2\right)=20$$
$$-50a=20$$
$$a=\frac{-2}{5}$$

$$y=\frac{-2}{5}(x-5)^2\left(x^2+4x-2\right)$$

7. a) Détermine une équation, sous forme simplifiée, d'une famille de fonctions cubiques dont les zéros sont $-2\pm\sqrt{5}$ et 0.

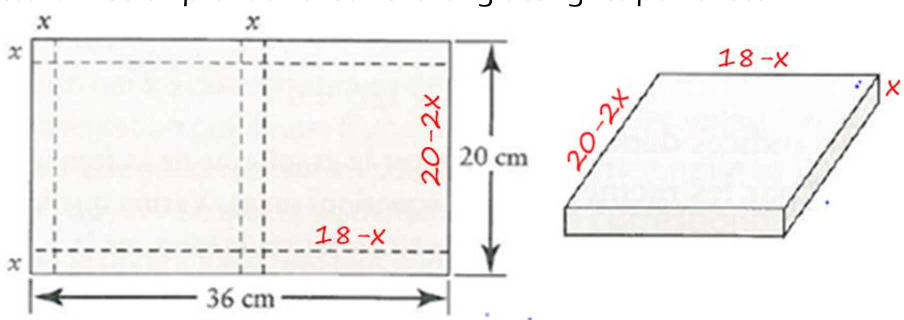
$$y=ax\left(x+2+\sqrt{5}\right)\left(x+2-\sqrt{5}\right)$$
$$y=ax\left(x^2+2x-x\sqrt{5}+2x+4-2\sqrt{5}+x\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\right)$$
$$y=ax\left(x^2+4x-1\right)$$

b) Détermine l'équation d'une fonction de la famille dont la représentation graphique passe par le point $(2,20)$.

$$20=a(2)\left(2^2+4(2)-1\right)$$
$$20=22a$$
$$a=\frac{10}{11}$$

$$y=\frac{10}{11}x\left(x^2+4x-1\right)$$

8. On doit fabriquer des boites de chocolats à partir de feuilles de carton de 36 cm sur 20 cm. Chaque boite est formée en pliant une feuille le long des lignes pointillées.



a) Exprime le volume de la boite comme une fonction x.

$$V=x(18-x)(20-2x)$$

b) Détermine les dimensions possibles pour un volume de 306 cm^3.

$$306=x(18-x)(20-2x)$$
$$0=x\left(360-36x-20x+2x^2\right)-306$$
$$0=2x^3-56x^2+360x-306$$
$$0=2(1)^3-56(1)^2+360(1)-306$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -56 & 360 & -306 \\ & \downarrow & -2 & 54 & -306 \\ \hline & 2 & -54 & 306 & 0 \end{array}$$

$$0=(x-1)\left(2x^2-54x+306\right)$$
$$x=\frac{54\pm\sqrt{54^2-4(2)(306)}}{4}$$
$$x=\frac{54\pm21{,}63}{4}$$
$x=18{,}9$ ou $x=8{,}09$
à rejeter

Si $x = 1$, $20-2x = 18$, $18-x = 17$, si $x = 8{,}09$, $20-2x = 3{,}82$, $18-x = 9{,}91$

Soit 1 cm par 18 cm par 17 cm ou 8,09 cm par 3,82 cm par 9,91 cm.

Feuille de travail

9. Soit une boite dont la largeur égale à 5 cm de moins que sa longueur et dont la hauteur est égales à 1 cm de plus que le double de sa longueur. Ecris une équation pour son volume. Détermine les dimensions possibles pour un volume de 210 cm^3.

longueur $= x$
largeur $= x-5$
hauteur $= 2x+1$

$$V = x(x-5)(2x+1)$$
$$210 = x(x-5)(2x+1)$$
$$0 = x(2x^2 + x - 10x - 5) - 210$$
$$0 = 2x^3 - 9x^2 - 5x - 210$$
$$0 = 2(7)^3 - 9(7)^2 - 5(7) - 210$$

-7	2	-9	-5	-210
	$\downarrow$	-14	-35	-210
	2	5	30	0

$$0 = (x-7)(2x^2 + 5x + 30)$$
$$x = 7$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(30)}}{4}$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{-215}}{4}$$
aucune solution

Les dimensions sont de 7 cm par 2 cm par 15 cm.

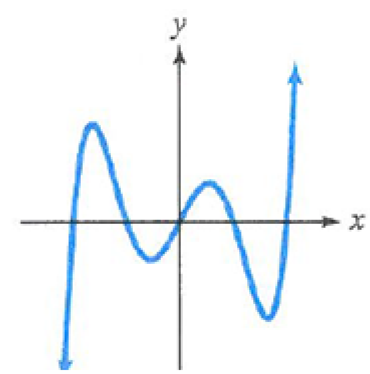
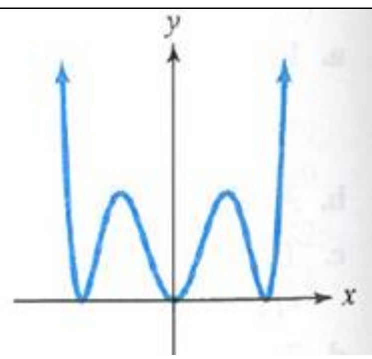
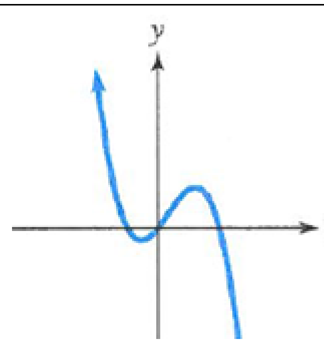
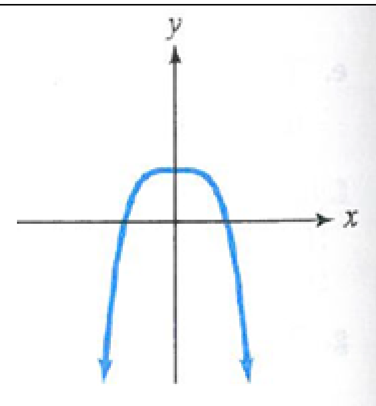
10-13 Associe chaque fonction avec sa représentation graphique.

10. $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$ c)

11. $f(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2$ b)

12. $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ a)

13. $f(x) = -x^4 + 1$ d)

a).		b)	
c)		d)	

14. Le prix p d'une action t année après 1999 peut être modélisé par la fonction $p(t) = 0{,}5t^3 - 5{,}5t^2 + 14t$. Quand sera-t-il supérieur à 90$?

$$0{,}5t^3 - 5{,}5t^2 + 14t > 90$$
$$0{,}5t^3 - 5{,}5t^2 + 14t - 90 > 0$$
$$0{,}5\left(t^3 - 11t^2 + 28t - 180\right) > 0$$
$$0{,}5\left(t - 10\right)\left(t^2 - t + 18\right) > 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -10 & 1 & -11 & 28 & -180 \\ & \downarrow & -10 & 10 & -180 \\ \hline & 1 & -1 & 18 & 0 \end{array}$$

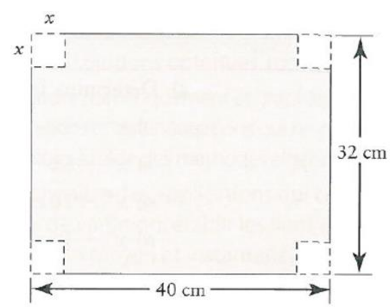
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(18)}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-71}}{2}$$
aucune solution

	0		10	$+\infty$
$0{,}5(t-10)$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$t^2 - t + 18$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
$0{,}5(t-10)(t^2-t+18)$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$]10, \infty[$

Il sera supérieur à 90$ après 2009.

15. On fabrique des boites ouvertes en découpant des carrés congruents aux quatre coins de feuille de carton et en repliant les côtés vers le haut. Les dimensions de la feuille de carton sont indiquées ci-dessous.



Indique quelles valeurs peuvent prendre la hauteur de la boite afin que le volume soit inférieur à 3 300 cm^3.

$$V = x(40 - 2x)(32 - 2x) < 3300$$
$$x\left(1280 - 80x - 64x + 4x^2\right) - 3300 < 0$$
$$4x^3 - 144x^2 + 1280x - 3300 < 0$$
$$4\left(x^3 - 36x^2 + 320x - 825\right) < 0$$
$$(5)^3 - 36(5)^2 + 320(5) - 825 = 0$$
$$4(x - 5)\left(x^2 - 31x + 165\right) < 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & 1 & -36 & 320 & -825 \\ & \downarrow & -5 & 155 & -825 \\ \hline & 1 & -31 & 165 & 0 \end{array}$$

$$x = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 4(1)(165)}}{2}$$
$$x = \frac{31 \pm \sqrt{301}}{2} = \frac{31 \pm 17{,}3}{2}$$
$$x = 24{,}17 \quad \text{ou} \quad x = 6{,}85$$

	0	5		6,85		24,17	$+\infty$
$(x-5)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2x - 31 + \sqrt{301})$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2x - 31 - \sqrt{301})$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
V	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$]0, 5[\cup \left]\frac{31 - \sqrt{301}}{2}, \frac{31 + \sqrt{301}}{2}\right[$$